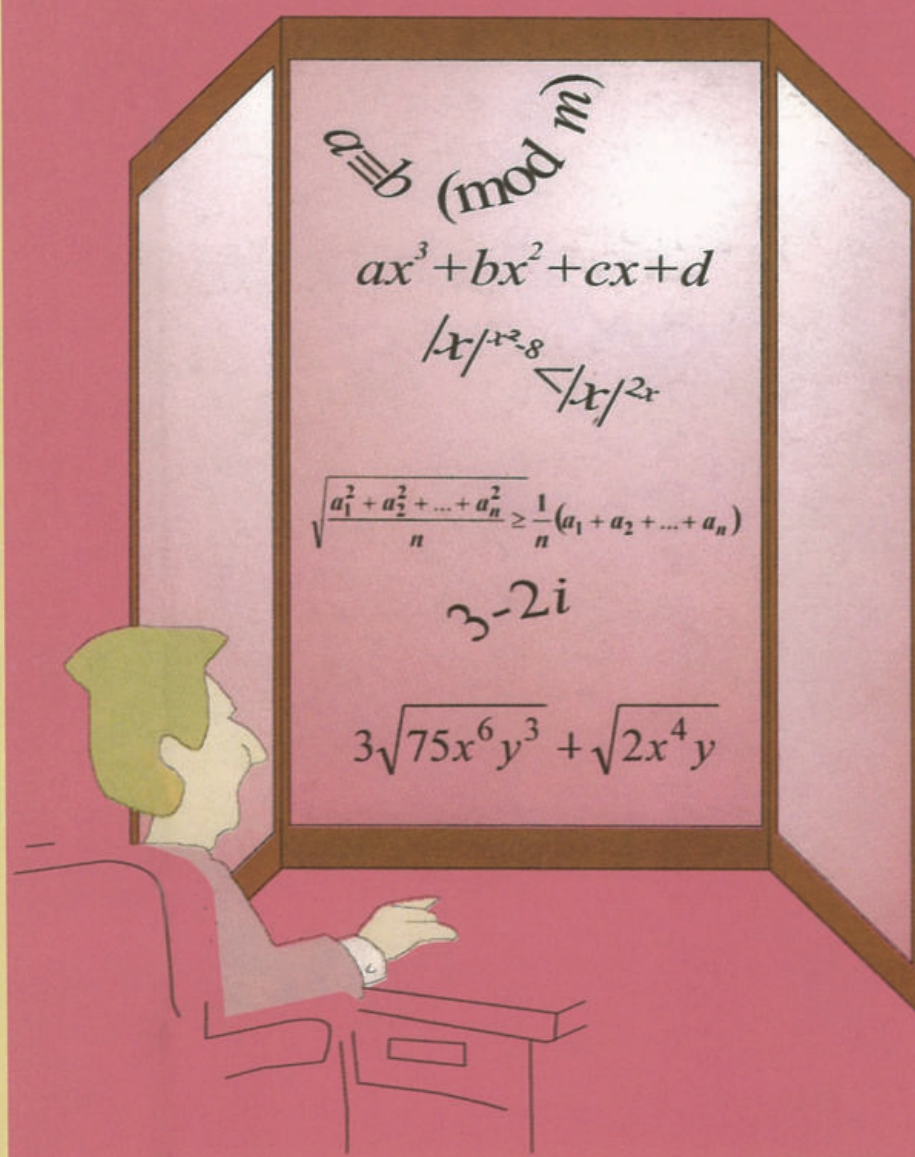


ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ КОСТАДИН ТРЕНЧЕВСКИ
БИЛЈАНА КРСТЕСКА СНЕЖАНА ЗДРАВЕСКА



ЗА ТРЕТА ГОДИНА НА РЕФОРМИРАНОТО
ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ

ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ КОСТАДИН ТРЕНЧЕВСКИ
БИЛЈАНА КРСТЕСКА СНЕЖАНА ЗДРАВЕСКА

А Л Г Е Б Р А

ЗА ТРЕТА ГОДИНА НА РЕФОРМИРАНОТО
ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ
(ИЗБОРЕН ПРЕДМЕТ)

IV ИЗДАНИЕ



ПРОСВЕТНО ДЕЛО, АД

Уредник:

Весна ДУКОСКА

Рецензенти:

д-р Димитра КАРЧИЦКА, редовен професор
на ПМФ (во пензија)

Зорка ХРИСТОВСКА, професор при ДСУ
„Таки Даскало” - Битола

Петруш ЏОРЛЕВ, професор по математика
ДСУ „Јане Сандански” - Струмица

Со решение на Министерот за образование и
наука на Република Македонија бр. 11-3867/1
од 15. 07. 2004 година, се одобрува употребата
на овој учебник.

Предговор

Учебникот **АЛГЕБРА** за трета година на гимназиското образование е пишуван според Наставната програма за истоимениот изборен предмет за трета година на реформираното гимназиско образование. Авторите настојуваа да ги обработат предвидените содржини во согласност со дидактичко-методското упатство за реализација на наставата. Учебникот се состои од шест тематски целини. Во рамките на секоја наставна тема обработени се предвидените содржини кои, по правило, се илустрирани со решени примери и цртежи. На крајот од секоја наставна содржина-наставна единица дадени се задачи за самостојна работа на часот или за домашна работа, што претставува продолжување на работата на часот и таа е највисок степен на самостојна работа на ученикот. На крајот од учебникот се дадени кратки одговори или решенија на задачите а, по избор на авторите, некаде и упатство за нивно решавање.

Во првата наставна тема „**Корени**“ има повторување и проширување на знаењата за корени. Затоа, при реализирање на оваа наставна тема може да се настојува на самостојна работа од страна на учениците.

Совладувањето на материјалот изложен во втората наставна тема „**Одбрани делови од теорија на броеви**“ дава можност за проширување на знаењата во врска со теоријата на броевите со кои се започна во изборниот предмет Елементарна алгебра. Даден е доказот на некои од критериумите за деливост, како и на теоремите на Ојлер, Ферма и Вилсон.

Третата наставна тема „**Неравенства**“ содржи повторување на основните неравенства меѓу реалните броеви, докажување на некои неравенства и примена на неравенствата во докажување на други неравенства од алгебра и геометрија.

Четвртата наставна тема „**Полиноми**“ претставува повторување на формулите за скратено множење, како и проширување на знаењата за разложување на полиноми на множители, рационализација на именител на дропка, признаци за деливост. Направена е анализа на задачи, особено за решавање на некои видови равенки каде се укажува на чекорите на нивното решавање.

Во претпоследната наставна тема „**Равенки, системи равенки, неравенки и системи неравенки**“ се изработени цртежи со графички приказ за решение на систем од квадратна и линеарна равенка, како на пример, пресек на права со крива од втор ред и истакнато е решението. Исто така, преку цртеж даден е знакот на квадратен трином, решение на неравенка и систем неравенки со една непозната и др. Преку решавање на примери се овозможува на разбирлив начин да се даде постапката на решавање, односно добивање на решението на равенки и системи равенки (неравенки).

Совладувањето на материјалот изложен во последната наставна тема „**Комплексни броеви**“ овозможува проширување на знаењата во врска со комплексните броеви, кои се изучуваа во II година по математика-задолжителен предмет во реформираното гимназиско

образование-теорија со воведување на тригонометриска форма на комплексните броеви, операции со комплексни броеви во тригонометриска форма и нивна примена.

Користени ознаки во учебникот

Дефиниција 1.

дефиниција со реден број во наставната единица.

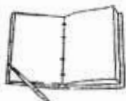
Теорема 1.

теорема со реден број во наставната единица.

Пример 1

решен пример или упатство за решавање на задача со реден број во наставната единица.

Забелешка- следува коментар важен за изложениот теоретски дел.



- означува задачи за самостојна работа.

1.- означува реден број на задача за самостојна работа.

Посебна благодарност должиме на рецензентите на овој учебник, особено на проф. д-р Димитра Карчицка, чии сугестии и забелешки придонесоа за подобрување на неговиот квалитет.

Авторите однапред ќе бидат благодарни за секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината, бидејќи веруваат дека оваа книга ќе придонесе учениците повеќе да ја засакаат математиката и да навлезат во нејзините тајни.

Септември, 2004

Авторите

1. КОРЕНУВАЊЕ

1.1. Проширување и скратување на корени.

Коренување на производ и количник

Пример 1 $\sqrt[6]{16} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^{2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{2}.$

Пример 2 $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$ претстави ги како корени со ист коренов показател, а потоа спореди ги.

Решение. Бројот 6 е НЗС за кореновите показатели 3 и 2. Притоа имаме:

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[2 \cdot 3]{3^2} = \sqrt[6]{9}, \quad \sqrt{2} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^3} = \sqrt[6]{8}$$

Бидејќи $9 > 8$, добиваме $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}.$

Пример 3 Следните корени запиши ги со најмал коренов показател:

а) $\sqrt[6]{8a^{12}b^9},$ б) $\sqrt[8]{16a^8b^4},$ в) $\sqrt[4]{36a^2b^4},$

г) $\sqrt[9]{\frac{512a^6b^3}{125x^6y^9}},$ д) $\sqrt[6]{(x-a)^{12}}.$

Ако k, m, n се природни броеви ($k \geq 2$), тогаш за секој $a \geq 0$ е исполнето:

$$\sqrt[km]{a^{mn}} = \sqrt[k]{a^n}$$

Решение. а) $\sqrt{2a^4b^3}.$ б) $\sqrt{2a^2b}.$ в) $\sqrt{6ab^2}.$ г) $\frac{1}{y} \sqrt[3]{\frac{8a^2b}{5x^2}}.$ д) $\sqrt[4]{(x-a)^3}.$

Пример 4 Доведи ги корените до ист коренов показател:

а) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[5]{3},$ б) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{6},$ в) $\sqrt[4]{3}, \sqrt[6]{5}$ и $\sqrt[12]{35},$

г) $\sqrt{2}, \sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[8]{4},$ д) $\sqrt[6]{x^5}, \sqrt[4]{y^3}$ и $\sqrt[3]{z^2}.$

Решение. а) $\sqrt[15]{1024}$ и $\sqrt[15]{27}.$ б) $\sqrt[12]{64}, \sqrt[12]{256}$ и $\sqrt[12]{216}.$

в) $\sqrt[12]{27}, \sqrt[12]{25}$ и $\sqrt[12]{35}.$ г) $\sqrt[8]{16}, \sqrt[8]{9}$ и $\sqrt[8]{4}.$ д) $\sqrt[12]{x^{10}}, \sqrt[12]{x^9}$ и $\sqrt[12]{z^8}.$

Пример 5 а) $\sqrt{25 \cdot 64 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 8 \cdot 2 = 80.$

б) $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6.$

в) $\sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{2^3 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt{(2^2)^2 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 3 = 12.$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

за секои $a, b \geq 0$ и

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

за секои $a \geq 0, b > 0.$

Пример 6 Најди го укажаниот корен со претходно разложување на бројот на прости множители: а) $\sqrt{4356},$ б) $\sqrt{298116}.$

а)

4356	2
2178	2
1089	3
363	3
121	11
11	11
1	

$$\sqrt{4356} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{11^2} = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 298116 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2, \\ \sqrt{298116} &= \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{13^2} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 = 546. \end{aligned}$$

Пример 7 а) $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8},$ б) $\sqrt{\frac{32}{98}} = \sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}.$

Пример 8 Спореди ги вредностите на изразите:

а) $\sqrt{8^2 + 6^2}$ и $8 + 6,$ б) $\sqrt{10^2 - 6^2}$ и $10 - 6.$

Решение. а) $\sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10, 8 + 6 = 14.$

Од $10 < 14$ имаме $\sqrt{8^2 + 6^2} < 8 + 6.$

б) $\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8, 10 - 6 < 4.$

Од $8 > 4$ имаме $\sqrt{10^2 - 6^2} > 10 - 6.$

Значи нема правило за коренување на збир и разлика!

Пример 9 Најди ги корените:

а) $\sqrt{25 \cdot 49},$ б) $\sqrt{7 \cdot 63},$ в) $\sqrt{8 \cdot 72}.$

Решение. а) 35. б) 21. в) 24.

Пример 10 Најди ги корените:

а) $\sqrt{\frac{64}{169}},$ б) $\sqrt{\frac{50}{162}},$ в) $\sqrt{\frac{48}{147}},$ г) $\sqrt{\frac{20}{405}}.$

Решение. а) $\frac{8}{13},$ б) $\frac{5}{9},$ в) $\frac{4}{7},$ г) $\frac{2}{9}.$

Пример 11 Најди го коренот, со претходно разложување на множители на коренуваниот број:

а) $\sqrt{1764},$ б) $\sqrt{17424},$ в) $\sqrt{7056},$ г) $\sqrt{11025}.$

Решение. а) 42, б) 132, в) 84, г) 105.

Пример 12 Пресметај:

а) $\sqrt{3^2 + 4^2},$ б) $\sqrt{7^2 + 24^2},$ в) $\sqrt{17^2 - 8^2},$ г) $\sqrt{50^2 - 14^2}.$

Забелешка: Во понатамошниот текст, без да нагласуваме, претпоставуваме дека општите броеви a, b, c, x, y ги задоволуваат соодветните услови за да бидат определени изразите во кои се појавуваат.



Задачи за самостојна работа

Упрости ги корените:

1. а) $\sqrt[3]{a^9},$ б) $\sqrt[8]{a^{20}},$ в) $\sqrt[9]{a^{15}},$ г) $\sqrt[10]{a^{25}}.$

2. а) $\sqrt{a^6 b^9},$ б) $\sqrt[4]{a^6 b^{10}},$ в) $\sqrt[14]{a^{21} b^{18}},$ г) $\sqrt[6]{\frac{a^6}{b^8}}.$

3. а) $\sqrt[4]{25x^2y^2}$, б) $\sqrt[8]{16x^{12}y^4}$, в) $\sqrt[6]{27a^3b^3}$, г) $\sqrt[10]{32a^{15}b^{20}c^5}$.

Доведи ги до ист коренов показател:

4. а) $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a^2}, \sqrt[6]{a^5}$; б) $\sqrt[6]{x^5}, \sqrt[8]{x^3}, \sqrt[12]{x^{12}}$;
в) $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a^2}, \sqrt[10]{a^7}$; г) $\sqrt[5]{a^4}, \sqrt[10]{a^9}, \sqrt[15]{a^7}$;

5. а) $\sqrt[3]{x^2}, \sqrt[3]{xy^2}, \sqrt[4]{x^3y}$; б) $\sqrt[5]{a^4}, \sqrt[10]{a^9}, \sqrt[15]{a^7}$;
в) $\sqrt{a}, \sqrt[5]{a^3}, \sqrt[10]{a^7}$; г) $\sqrt[6]{a^5b}, \sqrt[4]{a^3}, \sqrt[8]{a^7b^5}$.

6. Пресметај:

а) $\sqrt{0,01 \cdot 6,25}$, б) $\sqrt{0,36 \cdot 1,69}$, в) $\sqrt{0,04 \cdot 0,09 \cdot 0,25}$, г) $\sqrt{0,02 \cdot 0,98}$.

7. Пресметај:

а) $\sqrt{\frac{3^2 \cdot (-2)^2}{(-4)^2}}$, б) $\sqrt{\frac{(-1)^2 \cdot 5^2}{(-3)^2}}$, в) $\sqrt{\frac{(-5)^2 \cdot 6^2}{(-3)^2}}$, г) $\sqrt{\frac{(-4)^2 \cdot (-6)^2}{64}}$.

8. Пресметај го коренот со разложување на поткореновиот број на прости множители:

а) $\sqrt{7683984}$, б) $\sqrt{142884}$, в) $\sqrt{1002001}$, г) $\sqrt{3956121}$.

9. Пресметај:

а) $\sqrt{5^2 + 12^2}$, б) $\sqrt{8^2 + 15^2}$, в) $\sqrt{15^2 - 9^2}$, г) $\sqrt{39^2 - 15^2}$.

10. Пресметај ја вредноста на корените, со разложување на коренуваниот број на прости множители:

а) $\sqrt{74088^3}$, б) $\sqrt[4]{50625}$, в) $\sqrt[3]{-248832}$, г) $\sqrt[6]{0,46656}$.

1.2. Нормален вид на корен

А. Меѓу најпростите ирационални изрази спаѓаат таканаречените едночлени ирационални изрази. Тоа се ирационални изрази што се добиени од посебни и општи броеви со помош на операциите: множење, степенување и коренување.

Пример 1 Едночлени ирационални изрази се: $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{a^2x}{\sqrt{x}}}$, $5ab^2\sqrt[4]{\frac{1}{a^2b}}$, $6a^3\sqrt{3a\sqrt{a}}$.

Ирационалниот израз $\sqrt[3]{1+x^2}$ не го сметаме за едночлен.

Една од почестите трансформации што ги вршме на корените е нивно доведување во нормален (упростен) вид.

Даден корен велиме дека е во **нормален вид** ако изразот под коренот не содржи именител, множители, кои можат да се извлечат пред знакот на корен, и ако е сведен на најмал можен коренов показател.

Пример 2 Корените $5\sqrt[3]{x^2}$, $-2a^2b\sqrt[4]{x^3y}$; $\frac{3a}{b^2}\sqrt[5]{2a^2b^3}$ се во нормален вид; додека корените

$2\sqrt{a^2b^3c}$, $a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$, $3ax^2\sqrt[6]{a^2x^2}$ не се во нормален вид, бидејќи од првиот корен можат да се извлечат множители пред знакот на корен, во вториот корен поткореновиот израз е дропка, а во третиот корен можат да се скратат показателите.

Како што гледаме, трансформацијата доведување на коренот во нормален вид бара да се извршат следниве три попусти трансформации со коренот:

1. Изразот под коренот да се ослободи од именител (ако има таков).

2. Да се извлечат пред знакот на коренот сите можни множители.

3. Да се извршат потребните скратувања на показателите на коренот и поткореновиот израз.

Пример 3 Доведи го во нормален вид коренот $a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$.

Решение. $a\sqrt[3]{\frac{1}{a}} = a\sqrt[3]{\frac{a^2}{a \cdot a^2}} = a\sqrt[3]{\frac{a^2}{a^3}} = \frac{a}{a}\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^2}$ или, ако прво множителот пред коренот

(а) го внесеме под корен, $a\sqrt[3]{\frac{1}{a}} = \sqrt[3]{a^3 \cdot \frac{1}{a}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Пример 4 Доведи го во нормален вид коренот $\sqrt{\frac{x^3 + 2x^2y + xy^2}{a^3}}$, при $a > 0, x > 0, y > 0$.

Решение. $\sqrt{\frac{x^3 + 2x^2y + xy^2}{a^3}} = \sqrt{\frac{x(x+y)^2a}{a^3 \cdot a}} = \frac{x+y}{a^2} \sqrt{ax}$.

Б. Два корени велиме дека се слични ако тие можат да се трансформираат во таков вид што ќе се разликуваат само според некој рационален множител.

На пример, корените $\sqrt{8}$ и $\sqrt{18}$ се слични, бидејќи тие се разликуваат за рационалните множители 2 и 3, соодветно:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}.$$

Пример 5 Докажи дека корените $2ab\sqrt[3]{1 - \frac{a^3}{b^3}}$ и $4a^2b\sqrt[3]{a^3b^3 - b^6}$ се слични, ако а и b се рационални броеви.

Решение. $2ab\sqrt[3]{1 - \frac{a^3}{b^3}} = 2ab\sqrt[3]{\frac{b^3 - a^3}{b^3}} = \frac{2ab}{b}\sqrt[3]{b^3 - a^3} = 2a\sqrt[3]{b^3 - a^3},$

$$4a^2b\sqrt[3]{a^3b^3 - b^6} = 4a^2b\sqrt[3]{a^3(b^3 - b^3)} = 4a^2b\sqrt[3]{a^3(b^3 - a^3)}.$$

Очигледно е дека за утврдување дали два корени се слични или не, потребно е истите да се доведат во нормален вид. Меѓутоа, може да се докаже дека: два n-ти корени се слични ако и само ако односот од изразите под корените може да се претстави како n-ти степен на рационален број или на рационален израз.

Пример 6 Провери дали се слични корените: $\sqrt[4]{162a^5x^{15}}$ и $\sqrt[4]{\frac{y^8}{8a^3x}}$.

Решение. Го наоѓаме односот од изразите под корените:

$$Q = 162a^5x^{15} : \frac{y^8}{8a^3x} = \frac{162a^5x^{15} \cdot 8a^3x}{y^8} = \frac{1296a^8x^{16}}{y^8} = \left(\frac{6a^2x^4}{y^2} \right)^4.$$

Забележуваме, тој однос е 4-ти степен од рационалниот израз $\frac{6a^2x^4}{y^2}$. Според тоа, дадените корени се слични. Навистина, тие во нормален вид гласат:

$$\sqrt[4]{162a^5x^{15}} = 3ax^3\sqrt[4]{2ax^3}, \quad \sqrt[4]{\frac{y^8}{8a^3x}} = \frac{y^2}{2ax}\sqrt[4]{2ax^3}.$$



Задачи за самостојна работа

1. Извлечи ги можните множители пред корен:

а) $\sqrt{8}$, б) $\sqrt{45}$, в) $\sqrt{x^3}$, г) $\sqrt{\frac{a^2}{b^4}}$, д) $\sqrt{x^6}$, е) $\sqrt{(a^2 - b^2) \cdot (a + b)}$.

2. Ослободи го од именител изразот под коренот:

а) $\sqrt{\frac{5}{7}}$, б) $\sqrt{\frac{3}{8}}$, в) $\sqrt{\frac{6}{a}}$, г) $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

3. Доведи ги во нормален вид корените:

а) $8\sqrt{\frac{5}{8}}$, б) $\frac{3}{2}\sqrt{6\frac{2}{3}}$, в) $3x\sqrt{8y^3z^2}$, г) $\frac{3}{a}\sqrt{a^3b}$.
 д) $\frac{3x^2}{8y}\sqrt{\frac{64y^3}{3x}}$, е) $\frac{2bc^2}{3xy}\sqrt{\frac{9x^3y^3}{8bc^3}}$, е) $\frac{2x}{y}\sqrt{\frac{y^3(x^2+1)^2}{x}}$,
 ж) $\sqrt{(a-3)^3}$, з) $\sqrt{(a-5)^6}$, с) $\sqrt{(a-3)^3(a-5)^6}$.

4. Провери дали се слични корените:

а) 3 и $\sqrt{75}$, б) $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$ и $\sqrt{98}$, в) $\sqrt{\frac{3}{8}}$ и $\sqrt{216}$,
 г) $\sqrt{905}$ и $\sqrt{\frac{1}{5}}$, д) $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$ и $\sqrt{\frac{8}{3} - \frac{1}{3}}$, е) $\sqrt{2m^2 - 4mn + 2n^2}$ и $\sqrt{2m^2 + 4mn + 2n^2}$.

5. Запиши ги во нормален вид корените:

а) $\sqrt{5(m^2 - 2mn + n^2)}$, б) $\sqrt{3m^2 + 6mn + 3n^2}$,
 в) $\sqrt{2m^2 - 4mn + 2n^2} - \sqrt{2m^2 + 4mn + 2n^2}$, г) $\sqrt{3a^2 - 6a + 3} + \sqrt{3a^2 + 6a + 3}$.

6. Доведи ги во нормален вид:

а) $\sqrt[3]{\frac{xy}{x+y}}$, б) $\sqrt{\frac{x^3}{a^2+b^2}}$, в) $\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$, г) $\sqrt[3]{\frac{a}{a^2+2ab+b^2}}$, д) $\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$.

1.3. Операции со корени

А. Собирање и одземање на корени

Корени може да се соберат (одземат) само ако се слични, и тоа според правилото за собирање на мономи.

Пример 1 а) $3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{5} = (3 + 2 - 4)\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5}.$

б) $2\sqrt{2} + \sqrt{32} - \frac{1}{4}\sqrt{128} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$

в) $\sqrt{m^3 - m^2n} - \sqrt{mn^2 - n^3} = \sqrt{m^2(m-n)} - \sqrt{n^2(m-n)} = m\sqrt{m-n} - n\sqrt{m-n} = (m-n)\sqrt{m-n}.$

Б. Множење на корени

Корени со ист коренов показател се множат така што производот од поткореновите величини се коренува со заедничкиот коренов показател:

$$\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B} \cdot \sqrt[m]{C} \cdot \dots \cdot \sqrt[m]{L} = \sqrt[m]{A \cdot B \cdot C \cdot \dots \cdot L}.$$

Пример 2 а) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{3ab^2} = \sqrt{ab \cdot 2a^2 \cdot 3ab^2} = \sqrt{6a^4b^3} = a^2b\sqrt{6b}.$

б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^2 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{108}.$

в) $(a\sqrt{a} + \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a} - a\sqrt{a}) = (a\sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{a^2})(\sqrt[6]{a^2} - a\sqrt[6]{a^3}) = \sqrt[6]{a^2} - a^3.$

В. Делење на корени

Корени со еднакви коренови показатели се делат така што количникот на поткореновите величини (броителот и именителот) се коренуваат со заедничкиот коренов показател:

$$\sqrt[m]{A} : \sqrt[m]{B} = \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}}.$$

Пример 3 а) $\sqrt{12x^3y} : \sqrt{4xy} = \sqrt{12x^3y : 4xy} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}.$

б) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^3} : \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6]{a^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^5}}{a}.$

в) $(x+y) : \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{(x+y)^2} : \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{x^2 - y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x - y}.$

Г. Степенување на корен

Корен се степенува со даден број така што поткореновата величина се степенува со тој број:

$$(\sqrt[m]{A})^n = \sqrt[m]{A^n}.$$

Пример 4 а) $(\sqrt{x})^3 = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}.$

б) $(a^3\sqrt{ab^2})^2 = a^2\sqrt[3]{(ab^2)^2} = a^2\sqrt[3]{a^2b^4} = a^2b\sqrt[3]{a^2b}.$

$$в) (\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 = 2 - 2\sqrt{10} + 5 = 7 - 2\sqrt{10}.$$

Д. Коренување на корен

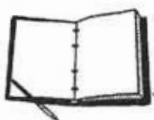
Корен се коренува така што кореновите показатели се множат, па со добиениот производ се коренува поткореновата величина.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[m \cdot n]{A}.$$

Пример 5 а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[12]{x^2} = \sqrt[6]{x}.$

б) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2} \cdot a} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}.$

в) $2\sqrt{x\sqrt{\frac{x^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{x}}} = 2\sqrt{x\sqrt[3]{\frac{2x^4}{4x}}} = 2\sqrt{x\sqrt[6]{\frac{x^3}{2}}} = 2\sqrt[6]{\frac{x^9}{2}} = 2\sqrt[12]{\frac{x^9}{2}} = 2\sqrt[12]{2^{11} \cdot \frac{x^9}{2}} = \sqrt[12]{2^{11} x^9}.$



Задачи за самостојна работа

Пресметај:

1. а) $\sqrt{108} - \sqrt{48} + \sqrt{147},$

б) $\sqrt{80} + \sqrt{45} - \sqrt{405},$

в) $4\sqrt{50} - 7\sqrt{98} + 2\sqrt{72},$

г) $\sqrt{x^3yz} + 2\sqrt{xy^5z^3} - \sqrt{xyz^7}.$

2. а) $3\sqrt{75x^6y^3} - \sqrt{2x^4y} - \sqrt{3x^2y},$

б) $\sqrt[3]{81a^2b^6} - \sqrt[3]{24a^5b^3} - \sqrt[3]{3a^2}.$

3. а) $6\sqrt{\frac{ax}{4}} - \frac{16}{3a}\sqrt{\frac{a^3x}{16}} + 3a\sqrt{\frac{x}{a}} - 2x\sqrt{\frac{a}{9x}},$

б) $\frac{3}{bc} \cdot \sqrt{ab^3c^3} + \frac{b}{ac} \sqrt{\frac{a^3b^3}{b}} - \frac{c^2}{ab} \sqrt{\frac{9a^3b^3}{c^3}}.$

4. а) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{2ab},$

б) $\sqrt{1\frac{4}{5}a} \cdot \sqrt{5b^2},$

в) $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^4},$

г) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3},$

д) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{ab^3},$

е) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b^5}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b^5}{a^5}},$

ж) $\sqrt[4]{ab^{-1}} \cdot \sqrt{a^{-1}b^{-3}} \cdot \sqrt[12]{a^5b^7}.$

5. а) $\sqrt{48} : \sqrt{3},$

б) $\sqrt{0,8} : \sqrt{0,05},$

в) $\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{a},$

г) $\sqrt[3]{a} : \sqrt[8]{a^5},$

д) $\left(\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^2}\right) : \sqrt[12]{a^7},$

е) $\sqrt[9]{\frac{a^4b^5}{x^2y^4}} : \sqrt[9]{\frac{b^2x^{-4}}{ay^3}},$

ж) $x\sqrt{\frac{x-1}{x}} : \sqrt[4]{\frac{x^3-x^2}{x+1}}.$

6. а) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5,$

б) $a\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3,$

в) $\left(\sqrt[2]{a^4bc^5}\right)^4,$

г) $-\frac{2a}{3b}\left(\sqrt[6]{a^5b^3}\right)^2,$

д) $\left(\frac{x \cdot \sqrt[3]{(x-y)^2}}{x-y}\right)^4,$

е) $\left(-\frac{m+n}{m-n} \sqrt[3]{\frac{(m-n)^2}{m+n}}\right)^5,$

ж) $\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^2.$

$$\begin{array}{llll}
 7. \text{ а) } \sqrt[4]{5\sqrt{a^6}}, & \text{б) } \sqrt[3]{a^8b^{10}}, & \text{в) } \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}, & \text{г) } \sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}, \\
 \text{д) } \sqrt[3]{x^2y^6\sqrt{xy^5}}, & \text{е) } \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}, & \text{ж) } a\sqrt{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}.
 \end{array}$$

1.4. Рационализирање на именител на дробка

Дробен израз што содржи корен ќе го нарекуваме изразот $Q = \frac{M}{N}$ каде што барем еден од изразите M или N содржи корен.

Трансформацијата на дробен израз по која именителот или броителот нема да содржат ниту еден корен се нарекува **рационализација** на именителот или броителот или ослободување од ирационалноста на именителот или броителот.

А. Кога именителот (броителот) на еден дробен израз содржи корен и коефициент, за да го рационализираме ги множиме броителот и именителот на дробката со соодветен корен, со цел да се ослободиме од коренот во именителот (броителот). Значи, ако $n > k$

именителот на дробката $\frac{A}{B\sqrt[n]{C^k}}$ се рационализира на следниов начин:

$$\frac{A}{B\sqrt[n]{C^k}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{C^{n-k}}}{B \cdot \sqrt[n]{C^k} \sqrt[n]{C^{n-k}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{C^{n-k}}}{B \cdot \sqrt[n]{C^n}} = \frac{A}{B} \cdot \frac{\sqrt[n]{C^{n-k}}}{\sqrt[n]{C^n}}.$$

Пример 1 Рационализирај го именителот на дробката:

$$\begin{array}{llll}
 \text{а) } \frac{1}{3\sqrt{2}}, & \text{б) } \frac{\sqrt{a}}{-2\sqrt{xy}}, & \text{в) } \frac{2}{\sqrt[5]{4}}, & \text{г) } \frac{1}{\sqrt[7]{5^3}}.
 \end{array}$$

$$\text{Решение. а) } \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad \text{б) } \frac{\sqrt{a}}{-2\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{xy}}{-2\sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{axy}}{-2xy},$$

$$\text{в) } \frac{2}{\sqrt[5]{4}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{4^4}}{\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{4^4}} = \frac{2\sqrt[5]{4^4}}{\sqrt[5]{4^5}} = \frac{2\sqrt[5]{4^4}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[5]{4^4}, \quad \text{г) } \frac{1}{\sqrt[7]{5^3}} = \frac{1 \cdot \sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^3} \cdot \sqrt[7]{5^4}} = \frac{\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^7}} = \frac{1}{5} \sqrt[7]{5^4}.$$

Пример 2 Рационализирај го броителот на дробката:

$$\begin{array}{llll}
 \text{а) } \frac{\sqrt{a}}{3}, & \text{б) } \frac{\sqrt{x+y}}{3\sqrt{x}}, & \text{в) } \frac{\sqrt[4]{x^3}}{x}, & \text{г) } \frac{\sqrt[3]{a-b}}{a-b}.
 \end{array}$$

$$\text{Решение. а) } \frac{\sqrt{a}}{3} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{3 \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a^2}}{3\sqrt{a}} = \frac{a}{3\sqrt{a}}.$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{x+y}}{3\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x+y}}{3\sqrt{x} \sqrt{x+y}} = \frac{\sqrt{(x+y)^2}}{3\sqrt{x(x+y)}} = \frac{x+y}{3\sqrt{x(x+y)}}.$$

$$\text{в) } \frac{\sqrt[4]{x^3}}{x} = \frac{\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[4]{x}}{x \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt[4]{x^4}}{x\sqrt[4]{x}} = \frac{x}{x\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}.$$

$$r) \frac{\sqrt[3]{a-b}}{a-b} = \frac{\sqrt[3]{a-b} \cdot \sqrt[3]{(a-b)^2}}{(a-b) \sqrt[3]{(a-b)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(a-b)^3}}{(a-b) \sqrt[3]{(a-b)^2}} = \frac{a-b}{(a-b) \sqrt[3]{(a-b)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}.$$

Б. Кога именителот (броителот) на дробниот израз е збир (или разлика) од два изрази, така што еден од нив или двата содржат квадратен корен, за да рационализираме го множиме броителот и именителот на дробката соодветно со разликата (или збирот) на двата изрази. Односно:

$$\frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} \mp \sqrt{C})}{(\sqrt{B} \pm \sqrt{C}) \cdot (\sqrt{B} \mp \sqrt{C})} = \frac{A(\sqrt{B} \mp \sqrt{C})}{(\sqrt{B})^2 - (\sqrt{C})^2} = \frac{A(\sqrt{B} \mp \sqrt{C})}{B - C}.$$

Слично,

$$\frac{A}{\sqrt[3]{B} \pm \sqrt[3]{C}} = \frac{A(\sqrt[3]{B^2} \mp \sqrt[3]{BC} + \sqrt[3]{C^2})}{(\sqrt[3]{B} \pm \sqrt[3]{C})(\sqrt[3]{B^2} \mp \sqrt[3]{BC} + \sqrt[3]{C^2})} = \frac{A(\sqrt[3]{B^2} \mp \sqrt[3]{BC} + \sqrt[3]{C^2})}{(\sqrt[3]{B})^3 \pm (\sqrt[3]{C})^3} = \frac{A(\sqrt[3]{B^2} \mp \sqrt[3]{BC} + \sqrt[3]{C^2})}{B \pm C}.$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$$

$$(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$$

Пример 3 Рационализирај го именителот на дробниот израз:

а) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}},$

б) $\frac{5 + \sqrt{3}}{5 - \sqrt{3}},$

в) $\frac{2}{1 + \sqrt[3]{5}}.$

Решение. а) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$

б) $\frac{5 + \sqrt{3}}{5 - \sqrt{3}} = \frac{(5 + \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})}{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})} = \frac{(5 + \sqrt{3})^2}{25 - 3} = \frac{28 + 10\sqrt{3}}{22} = \frac{1}{11}(14 + 5\sqrt{3}).$

в) $\frac{2}{1 + \sqrt[3]{5}} = \frac{2(1 - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})}{(1 + \sqrt[3]{5}) \cdot (1 - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})} = \frac{2(1 - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})}{1 + 5} = \frac{1}{3}(1 - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}).$



Задачи за самостојна работа

Рационализирај ги именителите:

1. а) $\frac{3}{2\sqrt{5}},$

б) $\frac{5ab}{3\sqrt{ab}},$

в) $\frac{5}{2\sqrt[3]{25}},$

г) $\frac{a}{b\sqrt[6]{a}}.$

2. а) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}},$

б) $\frac{a+b}{2\sqrt{a-b}},$

в) $\frac{a+3}{\sqrt[3]{a^2-9}}.$

3. а) $\frac{2}{3-\sqrt{2}},$

б) $\frac{5}{\sqrt{6}+1},$

в) $\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}},$

г) $\frac{12}{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}.$

4. а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},$

б) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},$

в) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}},$

г) $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}.$

$$5. \text{ а) } \frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}},$$

$$\text{б) } \frac{12}{\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{5}}.$$

Рационализирај ги броителите:

$$6. \text{ а) } \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

$$\text{б) } \frac{5b\sqrt{a}}{6a},$$

$$\text{в) } \frac{\sqrt[4]{x^3}}{x},$$

$$\text{г) } \frac{\sqrt[5]{x}}{a}.$$

$$7. \text{ а) } \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{8},$$

$$\text{б) } \frac{2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{7} - 2\sqrt{3}},$$

$$\text{в) } \frac{b(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b},$$

$$\text{г) } \frac{1 - \sqrt{6} - \sqrt{5}}{10}.$$

1.5. Идентитети

При трансформацијата на некои ирационални изрази, освен својствата и правилата за операции со корени, понекогаш користиме и некои формули. Така на пример, ирационалниот израз од видот $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ во одредени случаи може да се претстави како збир од два попусти корени. Тоа го постигнуваме со помош на следниот **идентитет на Лагранж**:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \quad (1)$$

Ќе покажеме како со помош на формулата (1) сложениот корен $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ во случај кога разликата $A^2 - B$ е полн квадрат го трансформираме во попрост израз.

Пример 1 Упрости го изразот $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$.

Решение. Множителот 2 прво го внесуваме под знакот на внатрешниот корен:

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{7 - \sqrt{40}}.$$

Гледаме: $A = 7$, $B = 40$, а $A^2 - B = 49 - 40 = 9$ е точен квадрат ($9 = 3^2$). Со примена на формулата (1), добиваме:

$$\sqrt{7 - \sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{49 - 40}}{2}} - \sqrt{\frac{7 - \sqrt{49 - 40}}{2}} = \sqrt{\frac{7 + 3}{2}} - \sqrt{\frac{7 - 3}{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

Наместо формулата (1) да ја користиме (двапати) одделно за изразите $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ и $\sqrt{A - \sqrt{B}}$, при трансформацијата на некои изрази можеме да користиме една од следниве формули:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}}; \quad \sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad (2)$$

Формулата (1), всушност, е добиена со собирање и одземање на соодветните страни на овие две формули.

Пример 2 Упрости го изразот:

$$M = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$$

Решение: Согласно формулата (2) имаме:

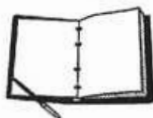
$$M = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} \\ = 2\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4(x-1)}}{2}} = 2\sqrt{\frac{x + \sqrt{(x-2)^2}}{2}} = 2\sqrt{\frac{x + |x-2|}{2}}$$

Бидејќи $|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{ако } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{ако } 1 \leq x < 2 \end{cases}$, тогаш:

а) при $x \geq 2$, $M = \dots = 2\sqrt{\frac{x + |x-2|}{2}} = 2\sqrt{\frac{x + x - 2}{2}} = 2\sqrt{x-1}$,

б) при $1 \leq x < 2$, $M = \dots = 2\sqrt{\frac{x + |x-2|}{2}} = 2\sqrt{\frac{x - x + 2}{2}} = 2\sqrt{1} = 2$.

Значи, при $x \geq 2$, $M = 2\sqrt{x-1}$, а при $1 \leq x < 2$, $M = 2$.



Задачи за самостојна работа

1. Трансформирај ги корените во попрост вид:

а) $\sqrt{11 + \sqrt{40}}$, б) $\sqrt{6 + \sqrt{11}}$, в) $\sqrt{17 - 2\sqrt{30}}$, г) $\sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$.

2. Пресметај:

а) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$, б) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$, в) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$, г) $\sqrt{10 - 10\sqrt{2}}$.

3. Пресметај:

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

4. Докажи го равенството:

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}(\sqrt{5} + 1).$$

5. Пресметај:

а) $\sqrt{x - 2\sqrt{x+1}}$ при $x > 1$,
б) $\sqrt{1+x+2\sqrt{x}} + \sqrt{1+x-2\sqrt{x}}$ при $0 \leq x \leq 1$.

6. Докажи ги формулите (2), а потоа и Лагранжовата формула (1).

1.6. Упростување на ирационални изрази

При упростување на ирационалните изрази се извршуваат операциите собирање, одземање, множење, делење, степенување и коренување. Значи секој ирационален израз може да се претстави со друг израз кој, на пример, не содржи корен во именителот или броителот.

Пример 1 Да се извршат операциите во изразот:

а) $\sqrt{2x} + \sqrt{8x} - 3\sqrt{2x}$, б) $\sqrt{xy} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} - xy + \sqrt{x}$,
в) $\sqrt{a^2x - 2abx + b^2x} - \sqrt{a^2x - 2acx + c^2x} + \sqrt{b^2x + 2bcx + c^2x}$.

Решение. а) $\sqrt{2x} + \sqrt{8x} - 3\sqrt{2x} = \sqrt{2x} + 2\sqrt{2x} - 3\sqrt{2x} = 0$.

б) $\sqrt{xy} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} - xy + \sqrt{x} = xy - xy + \sqrt{x} = \sqrt{x}$.

в) $\sqrt{a^2x - 2abx + b^2x} - \sqrt{a^2x - 2acx + c^2x} + \sqrt{b^2x + 2bcx + c^2x} =$
 $= \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)x} - \sqrt{(a^2 - 2ac + c^2)x} + \sqrt{(b^2 + 2bc + c^2)x} =$
 $= \sqrt{(a-b)^2x} - \sqrt{(a-c)^2x} + \sqrt{(b+c)^2x} =$
 $= |a-b|\sqrt{x} - |a-c|\sqrt{x} + |b+c|\sqrt{x} =$
 $= (|a-b| - |a-c| + |b+c|)\sqrt{x}.$

Пример 2 Да се докаже дека се точни равенствата:

а) $(\sqrt{0,6} + \sqrt{0,3} - \sqrt{0,9}) \cdot (3\sqrt{0,2} + 2\sqrt{0,3} + \sqrt{0,6}) = 1,2;$

б) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} - \sqrt{12,5} - 0,5\sqrt{200} + \sqrt{242} + 6\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{24,5} = 6,5\sqrt{2};$

в) $\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right) = \sqrt{1-a};$

г) $\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) : (x + \sqrt{x^2 - y^2}) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x^2 - y^2}.$

Решение. а) $\sqrt{0,3}(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{0,6}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1) = \sqrt{0,18}((\sqrt{2} + 1)^2 - (\sqrt{3})^2) =$
 $= \sqrt{0,18}(3 + 2\sqrt{2} - 3) = \sqrt{0,18} \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{0,36} = 1,2.$

б) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} - \sqrt{12,5} - 0,5\sqrt{200} + \sqrt{242} + 6\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{24,5} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{200}}{2} + \sqrt{242} + \frac{6\sqrt{9}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 3 - 5 - \sqrt{100} + \sqrt{484} + 9 - 7) =$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 10 + 22) = \frac{13}{\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{2} = 6,5\sqrt{2}.$

в) $\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right) = \frac{3 + \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}{3 + \sqrt{1-a^2}} = \sqrt{1-a}$

г) $\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) : (x + \sqrt{x^2 - y^2}) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x^2 - y^2}.$

Пример 3 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\left(\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}\right)^2.$

б) $(3\sqrt{a} - 1)^2 - (\sqrt{a} - 3)^2$ за $a = 4\frac{1}{8}.$

в) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ за $x = 18$ и $y = 15.$

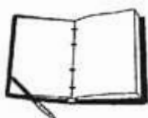
Решение. а) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5-2}\right)^2 = \frac{8}{9}.$

б) $(3\sqrt{a}-1)^2 - (\sqrt{a}-3)^2 = (3\sqrt{a}-1+\sqrt{a}-3)(3\sqrt{a}-1-\sqrt{a}+3) =$
 $= (4\sqrt{a}-4)(2\sqrt{a}+2) = 8(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1) = 8(a-1).$

За $a = 4\frac{1}{8}$ дадениот израз е еднаков на: $8\left(4\frac{1}{8}-1\right) = 8 \cdot \frac{33-8}{8} = 25.$

в) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - \sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} =$
 $= \frac{x + \sqrt{xy} - \sqrt{xy} + y}{x-y} = \frac{x+y}{x-y}.$

За $x=18$ и $y=15$ дадениот израз е еднаков на: $\frac{18+15}{18-15} = \frac{33}{3} = 11.$



Задачи за самостојна работа

Пресметај:

1. а) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} - \frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}},$

б) $\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} + \frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}.$

2. а) $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{7}{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}},$

б) $\frac{2}{3+\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{7}-2} - \frac{5}{4-\sqrt{11}}.$

3. а) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}},$

б) $\left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) : \left(a + \sqrt{a^2-b^2}\right).$

4. Докажи ги идентитетите:

а) $\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}} - \sqrt{1+a}\right) : \left(\frac{1}{1-a^2} - 1\right) = \sqrt{1+a},$

б) $\frac{x}{\sqrt{xy}-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y}-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)^2}{y-1}.$

1.7. Ирационални равенки и нивно решавање со воведување нова непозната

Равенка со една или неколку непознати која содржи ирационален израз во однос на непознатите се нарекува **ирационална равенка**.

Пример 1 На пример, $1 - \sqrt[3]{1-x^2} = 0$ е ирационална равенка со непозната x , додека $x + 2y - \sqrt{x^2 + y^2} - 2 = 0$ е ирационална равенка со непознати x и y .

При решавањето на ирационални равенки во полето од реални броеви, т.е. при барањето реални вредности за непознатите од ирационалната равенка, обично се поставуваат дополнителни услови како:

1⁰ Вредностите на изразите под корените за решенијата треба да бидат реални, а за корените со парни показатели дополнително тие мора да бидат и ненегативни; системот вредности што ги задоволуваат ваквите услови ја претставуваат **дефиниционата област** D на ирационалната равенка.

2⁰ За решенијата на равенката вредностите на корените со парни показатели се ненегативни додека вредностите на корени со непарни показатели се еднозначно определени и се со предзнаци еднакви на предзнаците на вредностите на соодветните изрази под корените.

Пример 2 При решавањето во полето реални броеви на равенката

$$\sqrt{4-x} - \sqrt{x-8} = 2$$

забележуваме дека првиот корен има смисла за вредности на x кои го исполнуваат условот $4-x \geq 0$, т.е. за вредностите на x од интервалот $-\infty < x \leq 4$, а вториот корен - за вредности на x , кои го исполнуваат условот $x-8 \geq 0$, т.е. за реалните броеви од интервалот $8 \leq x < +\infty$. Решението на равенката треба да ги исполнува двата услови, т.е. да припаѓа на пресекот на двата интервали, којшто очигледно е празното множество: $(-\infty, 4] \cap [8, +\infty) = \emptyset$. Значи, дефиниционата област на разгледуваната равенка не содржи ни еден елемент и оттука следува дека равенката нема решение.

Дека дадена ирационална равенка нема реални решенија во некои случаи може да се утврди и непосредно, без решавање и без одредување на нејзината дефинициона област.

Пример 3 Ирационалната равенка $\sqrt{x-3} = -2$ нема реални решенија, бидејќи нејзината лева страна е ненегативен број, за секој $x \geq 3$, т.е. за секоја дозволена вредност на x .

Исто така и равенката $\sqrt{x-2} + \sqrt[5]{x^2+1} + 5 = 0$ нема реални решенија, бидејќи на левата страна како збир на два ненегативни броја и на бројот 5 не може да биде еднаков на нула за ниту една дозволена вредност на x ($x \geq 2$).

Пример 4 Најди ги реалните решенија на равенката $x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$.

Решение: Дозволена вредност на y е секој ненегативен реален број. Притоа, $\sqrt{y} \geq 0$ и $y = (\sqrt{y})^2$ така што дадената равенка може да ја претставиме во видот:

$$x^2 - 6x + 9 + (\sqrt{y})^2 - 4\sqrt{y} + 4 = 0 \text{ или } (x-3)^2 + (\sqrt{y}-2)^2 = 0.$$

Квадратот на секој реален број е ненегативен број и збирот на два ненегативни броеви е нула, ако секој од нив е нула. Оттука следува дека дадената равенка е

еквивалентна со системот $\begin{cases} (x-3)^2 = 0 \\ (\sqrt{y}-2)^2 = 0 \end{cases}$, којшто понатаму е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Според тоа, дадената равенка има едно реално решение, претставено со подредениот пар (3,4).

Пример 5 Реши ја равенката $x + \sqrt{x^2 + (x+7)^2} = 18$ во полето на реалните броеви.

Решение: Дадената равенка содржи еден корен. Неговата дефинициона област е $D = \mathbb{R}$, бидејќи изразот под коренот има ненегативна вредност за секој реален број x . Ако воведеме ознака $y = \sqrt{x^2 + (x+7)^2}$, го добиваме системот рационални равенки

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ x^2 + (x+7)^2 = y^2 \end{cases}$$

чиешто множество од реални решенија е еднакво на множеството реални решенија на појдовната равенка.

Со замена на y со $18 - x$ во втората равенка, ја добиваме квадратната равенка $x^2 + (x+7)^2 = (18-x)^2$, т.е. $x^2 + 50x - 725 = 0$, чиешто решенија се броевите $x_1 = 5$, $x_2 = -55$ кои се реални, што значи ѝ припаѓаат на дефиниционата област и притоа за секој од нив е $y > 0$ ($y_1 = 18 - 5 = 13 > 0$, $y_2 = 18 - (-55) = 73 > 0$).

Според тоа, дадената равенка има две решенија: $x_1 = 5$, $x_2 = -55$, т.е. $\{5, -55\}$ е множеството решенија на појдовната равенка.

Пример 6 Реши ја равенката $\sqrt[4]{8-x} + \sqrt[4]{89+x} = 5$.

Решение. Воведувајќи ги ознаките $u = \sqrt[4]{8-x}$, $v = \sqrt[4]{89+x}$ го добиваме системот симетрични равенки

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 97 \end{cases} \quad (3)$$

додека дефинициона област на појдовната равенка согласно условите: $8-x \geq 0$, $89+x \geq 0$ е сегментот $-89 \leq x \leq 8$.

Системот (3) го сведуваме на систем од основни симетрични равенки од облик $u + v = a$, $uv = b$. За таа цел ја извршуваме трансформацијата:

$$u^4 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = [(u+v)^2 - 2uv]^2 - 2u^2v^2.$$

Потоа, $u + v$ и $u^4 + v^4$ ги заменуваме со нивните вредности од (3) и добиваме $97 = (25 - 2uv)^2 - 2u^2v^2$, а по средувањето $u^2v^2 - 50uv + 264 = 0$. Решавајќи ја оваа равенка, по uv добиваме $(uv)_1 = 6$, $(uv)_2 = 44$.

Така системот симетрични равенки (1) го сведуваме на два поедноставни системи:

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 44 \end{cases}$$

Вториот систем нема реални решенија, а од првиот систем добиваме $u_1 = 2$, $v_1 = 3$ и $u_2 = 3$, $v_2 = 2$.

Од $8-x = u^4$, за u_1 добиваме $x_1 = -8$, а за u_2 добиваме $x_2 = -73$. Да забележиме дека добиените вредности припаѓаат на дефиниционата област, односно $-8, -73 \in [-89, 8]$, од што следува дека дадената равенка има две решенија: $x_1 = -8$ и $x_2 = -73$.

Постапката за воведување на нова непозната ја применуваме, освен за избегнување на корените во ирационалната равенка и нивно сведување на систем рационални равенки, уште и за нејзина замена со други, попусти (рационални или ирационални) равенки по однос на новата непозната, кои знаеме да ги решиме.

Пример 7 Реши ја равенката: $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} = 0$.

Решение: Ако замениме $\sqrt[3]{x} = t$, тогаш $\sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x})^2 = t^2$, па дадената равенка го добива видот $t^2 - 2t - 3 = 0$, која е квадратна по однос на новата непозната t . Таа има две решенија: $t_1 = -1, t_2 = -3$. Од $\sqrt[3]{x} = -1$ добиваме $x_1 = -1$, а од $\sqrt[3]{x} = 3$ добиваме $x_2 = 27$. Тоа се бараните корени на дадената равенка.

Пример 8 Реши ја равенката $x^2 - x + 2\sqrt{x^2 - x - 1} = 4$.

Решение: Дадената равенка е еквивалентна со равенката $x^2 - x - 1 + 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 1} = 4$.

Ако ставиме $\sqrt{x^2 - x - 1} = t$ ($t \geq 0$), тогаш $x^2 - x - 1 = t^2$, па дадената равенка се трансформира во равенката $t^2 + 1 + 2t = 4$, односно $t^2 + 2t - 3 = 0$, чиито решенија се $t_1 = 1, t_2 = -3$. На таков начин решавањето на дадената равенка го сведуваме на решавање на поедноставни равенки: $\sqrt{x^2 - x - 1} = 1, \sqrt{x^2 - x - 1} = -3$.

Втората равенка нема решение, а од првата равенка добиваме: $x_1 = 2, x_2 = -1$. Проверката покажува дека тие се решенија и на дадената равенка.



Задачи за самостојна работа

1. Одреди ја дефиниционата област на равенката:

а) $\sqrt{x^2 - 4} = 1 + \sqrt{x - 1}$,

б) $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 1} + 3$.

2. Образложи зошто следниве равенки немаат решение:

а) $\sqrt{2x - 1} = -5$,

б) $\sqrt{1 - x} + \sqrt{2 - x} = -1$,

в) $\sqrt{1 + y} + \sqrt{2 + y} = 0$,

г) $\sqrt{x - 6} + \sqrt{5 - x} = 3$,

д) $\sqrt{y} = 1 + \sqrt{-1 - y}$,

е) $\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{x^2 - 4} = 1$.

1.8. Ирационални равенки. Решавање на ирационални равенки со последователно степенување на корените

Ослободувањето од корените во многу случаи во практиката го вршиме преку последователно степенување на двете страни на ирационалната равенка. Притоа секогаш треба да ги имаме во вид теоремите за еквивалентност на равенките, и системите равенки, кои важат како за ирационалните равенки така за системи ирационални равенки. Според нив, степенувањето со непарен показател на двете страни на равенката доведува до еквивалентна равенка во полето на реалните броеви; но степенувањето со парен показател доведува до внесување корени на новата равенка кои не се корени на појдовната, бидејќи во општ случај имаме

$$A = B \neq -B \Rightarrow A^{2k} = B^{2k} = (-B)^{2k} \quad (4)$$

Затоа, добиените решенија на новата равенка треба да се проверат дали се решенија и на појдовната равенка. Треба, исто така, да се има предвид дека равенството $\sqrt[2k]{A} = B$ во

полето реални броеви е еквивалентно со системот
$$\begin{cases} A = B^{2k} \\ B \geq 0 \end{cases}$$
.

Пример 1 Решај ја равенката $x^2 - 5 + \sqrt{x^2 - 6} = 7$.

Решение: Дадената равенка содржи само еден корен. Него го оставаме на левата страна, а другите членови ги пренесуваме на десната страна: $\sqrt{x^2 - 6} = 12 - x^2$.

Оваа равенка согласно погорната дискусија е еквивалентна на мешаниот систем:

$$\begin{cases} x^2 - 6 = (12 - x^2)^2 \\ 12 - x^2 \geq 0 \end{cases},$$

Равенката $x^4 - 25x^2 + 150 = 0$ има четири реални решенија: $x_1 = \sqrt{10}, x_2 = -\sqrt{10}, x_3 = \sqrt{15}, x_4 = -\sqrt{15}$. Решенијата x_1 и x_2 ја задоволуваат неравенката во системот, а решенијата x_3 и x_4 - не ја задоволуваат истата.

Според тоа, почетната равенка има две реални решенија: $x_1 = \sqrt{10}$ и $x_2 = -\sqrt{10}$.

Пример 2 Решај ја равенката: $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x} - \sqrt{x+8}$.

Решение: Ако ги квадрираме двете страни на равенката, добиваме:

$$x+1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = x - \sqrt{x+8}, \text{ односно } 2 + \sqrt{x+8} = 2\sqrt{x+1}.$$

Со повторно квадрирање добиваме $4 + 4\sqrt{x+8} + x + 8 = 4(x+1)$, т. е. $4\sqrt{x+8} = 3x - 8$. Ако повторно квадрираме, ја добиваме рационалната равенка:

$$16(x+8) = 9x^2 - 48x + 64, \text{ односно } 9x^2 - 64x - 64 = 0,$$

која има два реални корени $x_1 = 8, x_2 = -\frac{8}{9}$. Со непосредна проверка заклучуваме дека само $x = 8$ е корен на појдовната равенка.

Пример 3 Да се реши равенката $\sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{2(x^2 + 4x + 6)}$.

Решение: Да означиме со y еден од поткореновите изрази. Најпогодно е да земеме $x^2 + 4x + 6 = y$. Тогаш равенката ќе го добие видот:

$$\sqrt{y+2} - \sqrt{y-2} = \sqrt{2y}$$

Се ослободуваме од корените со квадрирање на двете страни:

$$y + 2 + y - 2 + 2\sqrt{y^2 - 4} = 2y, \text{ односно } 2\sqrt{y^2 - 4} = 0,$$

од каде што добиваме $y^2 - 4 = 0, y_1 = 2, y_2 = -2$. Од овие два корени, само коренот $y = 2$ ја задоволува равенката $\sqrt{y+2} - \sqrt{y-2} = \sqrt{2y}$ (при $y = -2$ два поткоренови изрази се негативни). Решавајќи ја равенката $x^2 + 4x + 6 = 2$ добиваме $x = -2$. Тоа е решение на почетната равенка.

Пример 4 Решај ја равенката $\sqrt{a+x} - \sqrt[3]{a+x} = 0$.

Решение. Нека $\sqrt[6]{a+x} = y$. Тогаш $\sqrt{a+x} = y^3, \sqrt[3]{a+x} = y^2$ и разгледуваната равенка го добива видот $y^3 - y^2 = 0$, или $y^2(y-1) = 0$. Оттука $y_1 = 0, y_2 = 1$. Од $\sqrt[6]{a+x} = 0$ имаме $x_1 = -a$, а од $\sqrt[6]{a+x} = 1$ имаме $x_2 = 1 - a$. Значи, дадената равенка има решенија $x_1 = -a$ и $x_2 = 1 - a$.



Задачи за самостојна работа

Реши ги равенките:

1. а) $\sqrt{4+x} = 6$,

б) $\sqrt{6-2x} = \sqrt{2}$,

в) $2\sqrt{5-4x} = 5-4x$.

2. а) $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{\sqrt{4x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$,

б) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{5}\sqrt{9x-45} = 4$.

3. а) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x+6} = x+3$,

б) $\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1}$.

4. а) $\sqrt{1+3x}+1 = \sqrt{x^2+4x+4}$,

б) $\sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{x}$.

5. а) $\sqrt[4]{x+15} - \sqrt{x-1} = 2$,

б) $\sqrt{x} + \sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1$.

1.9. Задачи за вежбање

Пресметај:

1. а) $5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}$,

б) $2,8\sqrt{2} + 1,62\sqrt{2} - 4,5\sqrt{2} + 0,3\sqrt{2}$,

в) $3\frac{1}{2}\sqrt{5} - 2\frac{3}{4}\sqrt{5} - \frac{5}{6}\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{5}$,

г) $2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 9\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$.

2. а) $\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2} - 4\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$,

б) $\sqrt{a} + 3\sqrt[4]{a} - 7\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}$,

в) $\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt{5} - 7\sqrt[3]{5}$,

г) $8\sqrt[4]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[4]{2}$.

3. а) $\sqrt{(a-b)^2}$,

б) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$,

в) $\sqrt{4x^2-20xy+25y^2}$.

4. а) $\sqrt{9 \cdot 25}$,

б) $\sqrt{16 \cdot 25}$,

в) $\sqrt{4 \cdot 36 \cdot 81}$,

г) $\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 64 \cdot 49}$.

5. а) $\sqrt{\frac{9}{25}}$,

б) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$,

в) $\sqrt{1\frac{13}{36}}$,

г) $\sqrt{2\frac{46}{49}}$.

6. а) $\sqrt{a^2b^6}$,

б) $\sqrt{a^{10}b^2}$,

в) $\sqrt{36a^2b^6c^3}$,

г) $\sqrt{27a^6b^9}$.

7. а) $\sqrt{\frac{a^2}{16b^4}}$,

б) $\sqrt{\frac{36a^6}{49b^2c^4}}$,

в) $\sqrt{\frac{x^{2n}}{y^{2m}}}$,

г) $\sqrt{\frac{a^{20}b^{6x}}{c^{4y}}}$.

8. Доведи ги во нормален вид корените:

а) $\sqrt{4a}$,

б) $\sqrt{9x^2y}$,

в) $\sqrt{2a^2-5a^2b}$,

г) $\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{b^3}}$,

д) $\sqrt[3]{\frac{(x^2-y^2)^4}{32(x-y)}}$.

Пресметај:

9. а) $\sqrt[4]{1\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{5b^2}$,

б) $\sqrt{12a^3b} \cdot \sqrt{3ab^3}$,

в) $\sqrt{a^{13}b^{-5}} \cdot \sqrt{a^{-3}b^{-7}}$.

10. а) $\sqrt{19\frac{1}{5}} : \sqrt{1\frac{1}{5}}$,

б) $\sqrt{x^{-9}y^{-4}} : \sqrt{x^{-3}}$,

в) $\sqrt{x} : \sqrt{\frac{x^3}{y}}$.

11. а) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[8]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$,

б) $a\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^3}$,

в) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b^5}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b^5}{a^5}}$.

12. а) $\sqrt[3]{a} : \sqrt[8]{a^5}$,

б) $(\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^2}) : \sqrt[12]{a^7}$,

в) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x}} : \sqrt[4]{\frac{x^3-x^2}{x+1}}$.

13. а) $(a^5\sqrt{a^4})^3$,

б) $(\sqrt[7]{a^4bc^5})^4$,

в) $\left(-\frac{x}{2y}\sqrt[4]{\frac{y}{x}}\right)^5$,

г) $\left(3x^2\sqrt[3]{\frac{a}{3x}}\right)^3$.

14. а) $\sqrt[5]{a^3b^2}$,

б) $\sqrt[7]{\sqrt[5]{a^{26}}}$,

в) $\sqrt[3]{a^2} \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{a\sqrt{a}}$,

г) $\sqrt[5]{a^3} \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a^3\sqrt{a^2}}$.

Рационализирај ги именителите:

15. а) $\frac{7}{\sqrt{5}}$,

б) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$,

в) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$,

г) $\frac{a+3}{\sqrt[3]{a^2-9}}$.

16. а) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$,

б) $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$,

в) $\frac{-8}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}$,

г) $\frac{35}{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}}$.

17. а) $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{20}}{\sqrt{3}-3\sqrt{20}}$,

б) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$,

в) $\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$,

г) $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$.

Пресметај:

18. а) $\left(\frac{3}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)$,

б) $\left(\sqrt{a}+\frac{ab^2+c}{\sqrt{ab^2+c}}\right) : (b\sqrt{a}+b\sqrt{ab^2+c})$,

в) $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right) : \frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$,

г) $\left[(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+a-b\right] \cdot \left[(a-b)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-1\right)\right]$,

д) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$,

е) $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) \cdot \sqrt{\frac{x-y}{xy}}$.

19. Докажи го равенството: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

20. Дадени се броевите: $x=\sqrt{4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ и $y=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Да се одреди $x+y$, xy и x^2+y^2 .

21. Пресметај:

а) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

б) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$,

в) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

Реши ги ирационалните равенки:

22. а) $\sqrt{x+1}=2$,

б) $3\sqrt{x+5}=12$,

в) $2\sqrt{x-7}=10$, г) $\sqrt{x}+3=4$.

23. а) $3\sqrt{x}+5\sqrt{x}=8$, б) $\sqrt{2x+2}=\sqrt{x-3}$,

в) $\sqrt{\frac{x-9}{x+7}}=\frac{3}{4}$, г) $2\sqrt{3x-1}=\sqrt{x+6}$.

24. а) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$,

в) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}$,

б) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$,

г) $\sqrt{x^2-5x+10}=8-2x$.

25. а) $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt{41-x}=4$,

б) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$.

26. а) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{2x}$,

б) $\sqrt{a+x}=a-\sqrt{x}$,

в) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}=a$,

г) $\sqrt{a+x}+x^2=a$.

27. Образложи зошто следните равенки немаат корен:

а) $\sqrt{4x-3}=-4$,

б) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=0$,

в) $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x-1}=-2$,

г) $\sqrt{x}-\sqrt{-3-x}=1$.

28. Реши ги равенките:

а) $\sqrt[4]{x^3-2x^2-5x+6}+\sqrt{x^2+5x+6}=0$,

б) $\sqrt{3x^2+5x-8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$,

в) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$.

2. ОДБРАНИ ДЕЛОВИ ОД ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

2.1. Функциите $[x]$ и $\{x\}$

На почстокот да се потсетиме дека за секој реален број $x \in \mathbb{R}$ постои единствен цел број $n \in \mathbb{Z}$, таков што $n \leq x < n+1$.

Дефиниција 1. За $x \in \mathbb{R}$, целиот број $n \in \mathbb{Z}$ за кој $n \leq x < n+1$, се означува со $[x]$ и се нарекува цел дел од x .

На тој начин е дефинирана функцијата $[x]$ од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{Z}$.

Пример 1 Докажи дека ако n и 4 се заемно прости броеви, тогаш:

$$\left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{2n}{4}\right] + \left[\frac{3n}{4}\right] = \frac{3n-3}{2}.$$

Решение. Сите природни броеви може да се претстават во еден од облиците $4q$, $4q+1$, $4q+2$ и $4q+3$ за некој $q \in \mathbb{N}$. Од условот следува дека $n=4q+1$ или $n=4q+3$.

За $n=4q+1$,

$$\left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{2n}{4}\right] + \left[\frac{3n}{4}\right] = \left[q + \frac{1}{4}\right] + \left[2q + \frac{2}{4}\right] + \left[3q + \frac{3}{4}\right] = q + 2q + 3q = 6q = \frac{3n-3}{2},$$

додека за $n=4q+3$,

$$\left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{2n}{4}\right] + \left[\frac{3n}{4}\right] = \left[q + \frac{3}{4}\right] + \left[2q + \frac{6}{4}\right] + \left[3q + \frac{9}{4}\right] = q + 2q + 1 + 3q + 2 = 6q + 3 = \frac{3n-3}{2}.$$

Дефиниција 2. За $x \in \mathbb{R}$, бројот $x - [x]$, се означува со $\{x\}$ и се нарекува дробен дел од x .

На тој начин е дефинирана функцијата $\{x\}$ од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$.

Од дефиницијата веднаш следува дека за секој x , $0 \leq \{x\} < 1$.

Пример 2 Докажи дека сите броеви $\{10^n \sqrt{3}\}$, $n=0,1,\dots$ се меѓусебно различни.

Решение. Нека $\{10^p \sqrt{3}\} = \{10^q \sqrt{3}\}$, $p \neq q$ и нека $e_1, d_1 d_2 \dots$ е децимален запис на $\sqrt{3}$. Од претходното равенство следува дека $d_{n+p} = d_{n+q}$, за $n=1,2,3,\dots$. Според тоа $\sqrt{3}$ би имал периодичен децимален запис со период $|p-q| > 0$, а тоа не е можно, бидејќи $\sqrt{3}$ е ирационален број.

Теорема 1. Нека x и y се реални броеви. Тогаш:

- а) $[x] \leq x < [x]+1$, $x-1 < [x] \leq x$, $0 \leq x - [x] < 1$.
- б) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \text{ е цел број} \\ -1, & \text{ако } x \text{ не е цел број} \end{cases}$.
- в) $[x+m] = [x] + m$, ако m е цел број.
- г) $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$.
- д) $[x-y] \leq [x] - [y] \leq [x-y] + 1$.
- е) $[x] \cdot [y] \leq [x \cdot y] \leq [x] \cdot [y] + [x] + [y]$, ако $x, y \geq 0$.
- ж) $\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{x}{m}\right]$, за природен број m .
- з) $[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{x}]$, ако $x \geq 0$.

Доказ. а) Секој дел од тврдењето следува непосредно од дефиницијата.

б) Ако x е цел број, тогаш $[-x] = -[x]$. Ако x не е цел број, тогаш од $[-x] = n$ следува дека $n \leq -x < n+1$, односно $-n-1 < x < -n$. Тогаш, $[x] = -n-1$ и $[-x] + [x] = -1$.

в) Од а) следува дека $x+m-1 < [x+m] \leq x+m$ и $x+m-1 < [x]+m \leq x+m$. Бидејќи $[x+m]$ и $[x]+m$ се цели броеви, следува дека тие се еднакви.

г) Нека $x = m + \alpha$, $y = n + \beta$ каде што $m, n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1$. Тогаш $[x] + [y] = m + n \leq [n + \alpha + m + \beta] = [x + y] = m + n + [\alpha + \beta] \leq m + n + 1 = [x] + [y] + 1$.

д) Од г) следува дека $[x - y] + [y] \leq [(x - y) + y] \leq [x - y] + [y] + 1$, односно дека $[x - y] \leq [x] - [y] \leq [x - y] + 1$.

ѓ) Од а) следува дека $[x] \cdot [y] \leq x \cdot y < ([x] + 1) \cdot ([y] + 1)$. Според тоа:

$$[x] \cdot [y] \leq [x \cdot y] \leq ([x] + 1) \cdot ([y] + 1) - 1 = [x] \cdot [y] + [x] + [y].$$

е) Нека $x = n + \alpha$, $n = qm + r$, $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq r < m - 1$. Тогаш,

$$\left[\frac{x}{m} \right] = \left[\frac{qm + r + \alpha}{m} \right] = q + \left[\frac{r + \alpha}{m} \right] = q.$$

Од друга страна, бидејќи $0 \leq r + \alpha < m$, следува дека

$$\left[\frac{[x]}{m} \right] = \left[\frac{n}{m} \right] = \left[q + \frac{r}{m} \right] = q, \text{ односно дека } \left[\frac{[x]}{m} \right] = \left[\frac{x}{m} \right].$$

ж) Бидејќи $x \geq 0$, x може да се запише во облик $x = n^2 + r + \{x\}$, каде што n и r се ненегативни цели броеви и притоа $0 \leq r \leq 2n$. Тогаш, од $\sqrt{n^2 + r} > n$, следува дека

$$[\sqrt{x}] = [\sqrt{n^2 + r}] = [\sqrt{n^2 + r} - n + n] = n + \left[(\sqrt{n^2 + r} - n) \frac{\sqrt{n^2 + r} + n}{\sqrt{n^2 + r} + n} \right] = n + \left[\frac{r}{\sqrt{n^2 + r} + n} \right] = n.$$

Слично, од $0 \leq r + \{x\} < 2n < \sqrt{n^2 + r} + \{x\} + n$, следува дека и

$$[\sqrt{x}] = [\sqrt{n^2 + r + \{x\}} - n + n] = n + \left[\sqrt{n^2 + r + \{x\}} - n \right] = n + \left[\frac{r + \{x\}}{\sqrt{n^2 + r + \{x\}} + n} \right] = n.$$

Пример 3 Ако x и y се ненегативни реални броеви, тогаш:

$$[2x] + [2y] \geq [x + y] + [x] + [y].$$

Решение. Нека $x = [x] + \alpha$, $y = [y] + \beta$ каде $0 \leq \alpha, \beta < 1$.

Ако е $\alpha + \beta < 1$ тогаш $[x] + [y] = [x + y]$ па $[2x] + [2y] \geq 2[x] + 2[y] = [x + y] + [x] + [y]$.

Ако $\alpha + \beta \geq 1$, тогаш $2\alpha \geq 1$ или $2\beta \geq 1$. Нека $2\alpha \geq 1$. Тогаш $[x] + [y] = [x + y] - 1$ и $[2x] = 2[x] + 1$ па затоа $[2x] + [2y] = 2[x] + 1 + [2y] \geq 2[x] + 1 + 2[y] = [x + y] + [x] + [y]$.

Пример 4 За секој $x \in \mathbb{R}$, $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$.

Решение. Нека $x = [x] + \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$. Ако $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, тогаш $\left[x + \frac{1}{2} \right] = [x]$ и $[2x] = 2[x]$.

Ако $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, тогаш $\left[x + \frac{1}{2} \right] = [x] + 1$ и $[2x] = 2[x] + 1$.

Теорема 2.

Ако $n \in \mathbb{N}$ и $x \geq 0$, тогаш постојат точно $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ природни броеви помали или еднакви на x , деливи со n .

Доказ. Броеви деливи со n се: $n, 2n, 3n, \dots$. Нека има j природни броеви помали или еднакви на x деливи со n . Тогаш $jn \leq x < (j+1)n$, односно $j \leq \frac{x}{n} < j+1$. Според тоа,

$$j \leq \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor < j+1, \text{ односно } j = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

Теорема 3.

Нека p е прост број, $n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{N}$ е најголемиот број за кој $p^a \mid n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$). Тогаш, $a = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \dots$

Доказ. Во низата $1, 2, \dots, n$ има $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ броеви деливи со p , па затоа:

$$n! = p \cdot 2p \cdot \dots \cdot \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor p \cdot M_1 = p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} \cdot \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor! \cdot M_1,$$

каде што M_1 е природен број кој не е делив со p . Со повторување на истата постапка за низата $1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, користејќи дека $\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$, добиваме дека:

$$n! = p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor} \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor! \cdot M_2$$

каде што M_2 е природен број кој не е делив со p .

Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме дека:

$$n! = M \cdot p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots},$$

каде што M е природен број кој не е делив со p . Значи, $a = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \dots$

Претходната постапка ќе заврши после конечен број чекори, бидејќи постои број m таков што за секој $k > m$, $p^k > n$, односно $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$.

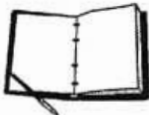
Пример 5 На колку нули завршува бројот $2003!$?

Решение. Ако N е бараниот број нули, тогаш $2003! = 10^N \cdot M$, каде што M е природен број кој не е делив со 10 . Бидејќи $10 = 2 \cdot 5$ добиваме дека $N = \min\{N_1, N_2\}$, за:

$$N_1 = \left\lfloor \frac{2003}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2003}{5^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2003}{5^5} \right\rfloor + \dots = 400 + 80 + 16 + 3 + 0 = 499, \text{ и}$$

$$N_2 = \left\lfloor \frac{2003}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2003}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2003}{2^{11}} \right\rfloor + \dots = 1001 + \dots > 499.$$

Значи, $N = 499$, односно бројот $2003!$ завршува на 499 нули.



Задачи за самостојна работа

- Докажи дека за произволни $m, n \in \mathbb{N}$, точно е неравенството: $m + \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \geq 2\lceil \sqrt{n} \rceil$.
- Докажи дека за секој позитивен број x важи $\lceil \sqrt{\lceil \sqrt{x} \rceil} \rceil = \lceil \sqrt{\sqrt{x}} \rceil$.
- Докажи дека ако $m \geq 2, a \geq 2$ и a и m се заемно прости броеви, тогаш:

$$\left\lceil \frac{a}{n} \right\rceil + \left\lceil \frac{2a}{n} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{(m-1)a}{n} \right\rceil = \frac{(m+1) \cdot (a-1)}{2}.$$
- Кои членови на низата $a_n = \lceil \sqrt{n(n+2) \cdot (n+4) \cdot (n+6)} \rceil$ се деливи со 7?
- За $n \in \mathbb{N}$, пресметај: $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2}{4} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rceil + \dots = ?$
- Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, $\left\lceil (2 + \sqrt{3})^n \right\rceil$ е непарен природен број.
- Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}, n > 1$, постои $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, таков што $n = \frac{\lceil x \rceil \{x\}}{x}$.
- Најди $n \in \mathbb{N}$ за кој дробниот дел $(2 + \sqrt{2})^n$ е поголем од 0,999999.

2.2. Мултипликативни функции

Нека $n \in \mathbb{N}$. Со $d(n)$ го означуваме бројот од сите природни делители на n . Со $\sigma(n)$ го означуваме збирот од сите природни делители на n .

Во следната табела се презентирани вредностите на $d(n)$ и $\sigma(n)$ за $n = 1, 2, \dots, 19$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$d(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24	31	18	39	20

Од дефинициите следува дека $d(n)=2$ и $\sigma(n)=n+1$ ако и само ако n е прост број.

Пример 1 Докажи дека:

$$\text{а) } \sum_{d|n} d^k = \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d} \right)^k, \quad \text{б) } d(n) < 2\sqrt{n}.$$

Решение. а) Ако d е делител на бројот n , тогаш тоа е и бројот $\frac{n}{d}$ и обратно.

б) Ако n не е потполн квадрат, тогаш неговите делители ги групираме во парови од облик $\left(d, \frac{n}{d}\right)$, $d < \frac{n}{d}$, кои ги има помалку од $\sqrt{n}$. Ако n е потполн квадрат, тогаш $d(n) \leq 2(\sqrt{n} - 1) + 1 < 2\sqrt{n}$.

Дефиниција 1.

За една функција $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ велиме дека е мултипликативна ако:

- 1) Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што $f(n_0) \neq 0$;
- 2) Ако $\text{НЗД}(m, n) = 1$, тогаш $f(mn) = f(m)f(n)$.

Теорема 1.

Ако $f(n)$ е мултипликативна функција, тогаш функцијата $g(n)$ дефинирана со $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ е, исто така, мултипликативна.

Доказ. Нека $m > 1$, $n > 1$ и $\text{НЗД}(m, n) = 1$. Тогаш:

$$g(m)g(n) = \sum_{d_1|m} f(d_1) \cdot \sum_{d_2|n} f(d_2) = \sum_{d_1|m; d_2|n} f(d_1)f(d_2).$$

Ако $d_1|m, d_2|n$, од тоа што $\text{НЗД}(m, n) = 1$, следува дека и $\text{НЗД}(d_1, d_2) = 1$. Од дефиницијата 1 следува дека $f(d_1)f(d_2) = f(d_1d_2)$, односно $g(m)g(n) = \sum_{d_1|m; d_2|n} f(d_1d_2)$.

Ако $d|mn$, тогаш од тоа што $\text{НЗД}(m, n) = 1$, следува дека постојат единствени броеви d_1, d_2 такви што $d_1|m, d_2|n$ и $d = d_1d_2$. Според тоа $g(m)g(n) = \sum_{d|mn} f(d) = g(mn)$.

Теорема 2.

Функциите $d(n)$ и $\sigma(n)$ се мултипликативни.

Доказ. Функцијата $f(n) = 1$ е мултипликативна. Бидејќи $d(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} f(n)$, од теорема 1, следува дека и $d(n)$ е мултипликативна функција.

Функцијата $f(n) = n$ е мултипликативна. Бидејќи $\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} f(d)$, од теорема 1, следува дека $\sigma(n)$ е мултипликативна функција.

Пример 2

Бројот 18 е производ од броевите 3 и 6, за кои $\text{НЗД}(3, 6) = 3 > 1$. За нив: $d(18) = 6 < 8 = d(3)d(6)$ и $\sigma(18) = 39 > 36 = \sigma(3)\sigma(6)$. Општиот случај е даден како задача.

Теорема 3.

Ако $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, каде што p_i се сите по парови различни прости делители на n , а a_i се природни броеви, тогаш:

$$(1) d(n) = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_k); \text{ и}$$

$$(2) \sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{a_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

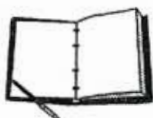
Доказ. Ако p е прост број и $a \geq 1$, тогаш делителите на p^a се $1, p, p^2, \dots, p^a$, па затоа $d(p^a) = 1 + a$ и $\sigma(p^a) = 1 + p + \dots + p^a = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$.

Равенствата (1) и (2) следуваат од мултипликативноста на функциите $d(n)$ и $\sigma(n)$.

Дефиниција 2. Еден природен број n се нарекува совршен ако $\sigma(n) = n + n = 2n$. Два природни броја n и m се нарекуваат пријателски ако $\sigma(n) = n + m = \sigma(m)$.

Пример 3 За бројот 6 точно е дека $\sigma(6) = 12 = 6 + 6$. За броевите 220 и 284 точно е дека $\sigma(220) = 220 + 284$ и $\sigma(284) = 284 + 220$.

Според тоа бројот 6 е совршен, додека броевите 220 и 284 се пријателски.



Задачи за самостојна работа

- Докажи дека броевите 28 и 496 се совршени.
- Најди број n помал или еднаков на 70 за кој $d(n) = 12$.
- Најди ги сите броеви n за кои $n = 2d(n)$.
- Најди број n за кој $\sigma(n) = 546$.
- Најди ги $\sigma(1184)$ и $\sigma(1210)$.
- Најди го $\sigma(n)$ за:

а) $n = 12496 = 2^4 \cdot 11 \cdot 71$;	б) $n = 14288 = 2^4 \cdot 19 \cdot 47$;	в) $n = 15472 = 2^4 \cdot 967$;
г) $n = 14536 = 2^3 \cdot 23 \cdot 79$;	д) $n = 14264 = 2^3 \cdot 1783$.	
- Докажи дека за природните броеви n, m за кои $\text{НЗД}(n, m) > 1$:

а) $d(nm) < d(n)d(m)$;	б) $\sigma(nm) > \sigma(n)\sigma(m)$.
-------------------------	--
- Докажи дека $\sum_{k=1}^n d(k) = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.
- Докажи дека:

а) $\sum_{k=1}^n \sigma(k) = \sum_{k=1}^n k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$,	б) $\sum_{k=1}^n \sigma(k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1 \right)$.
---	---
- Докажи дека ако $2^p - 1$ е прост број, тогаш $2^{p-1}(2^p - 1)$ е совршен број.
- Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, важи: $\sqrt{n} \leq \frac{\sigma(n)}{d(n)} \leq \frac{3n}{4}$.

2.3. Конгруенции во множеството на цели броеви

Методот на конгруенции во множеството на цели броеви е формален аритметички метод заснован на разгледувањето на својствата на целите броеви кои имаат еднакви остатоци при делењето со еден ист број. Овој метод прв го разработил Гаус, иако многу резултати во врска со конгруенциите биле познати и претходно.

Дефиниција 1.

Нека m е природен број и a, b се цели броеви. Ако m е делител на разликата $a - b$, т.е. $m \mid (a - b)$, тогаш велиме дека бројот a е конгруентен со бројот b по модул m , и пишуваме $a \equiv b \pmod{m}$.

Значи, $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $a - b = mk$ за некој цел број k .

Исто така, пишуваме $a \not\equiv b \pmod{m}$, кога бројот a не е конгруентен со бројот b по модул m , што значи дека m не е делител на $a - b$.

Пример 1

При делењето на броевите 77, 78, 79, 80, 81, 82 и 83 со бројот 7, се добива количник 11 и остатоци 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6 соодветно. Записот при ова делење е:

$$77 = 7 \cdot 11 + 0, 78 = 7 \cdot 11 + 1, 79 = 7 \cdot 11 + 2, 80 = 7 \cdot 11 + 3, 81 = 7 \cdot 11 + 4, 82 = 7 \cdot 11 + 5 \text{ и } 83 = 7 \cdot 11 + 6$$

што е еквивалентен со записот:

$$77 - 0 = 7 \cdot 11, 78 - 1 = 7 \cdot 11, 79 - 2 = 7 \cdot 11, 80 - 3 = 7 \cdot 11, 81 - 4 = 7 \cdot 11, 82 - 5 = 7 \cdot 11, 83 - 6 = 7 \cdot 11$$

соодветно. Со конгруенции, овие равенства се запишуваат како: $77 \equiv 0 \pmod{7}$,

$$78 \equiv 1 \pmod{7}, 79 \equiv 2 \pmod{7}, 80 \equiv 3 \pmod{7}, 81 \equiv 4 \pmod{7}, 82 \equiv 5 \pmod{7}, 83 \equiv 6 \pmod{7}.$$

Од дефиницијата 1 непосредно следува следнава теорема:

Теорема 1.

Нека $m \in \mathbb{N}$ и $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогаш:

(1) $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако постои цел број k таков што $a = b + km$;

(2) $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако при делењето со m броевите a и b имаат еднакви остатоци.

Доказ. (1) Од дефиницијата на конгруенција следува дека $a \equiv b \pmod{m}$ ако $m \mid (a - b)$. Понатаму, $m \mid (a - b)$ ако и само ако постои цел број k , таков што $a - b = k \cdot m$.

Значи, $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $a = b + k \cdot m$.

(2) Нека $a = m \cdot p + r$ и $b = m \cdot q + s$, каде што p, q, r, s се цели броеви, $0 \leq r < m, 0 \leq s < m$. Тогаш: $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $m \mid (a - b)$, ако и само ако $m \mid (m \cdot p + r) - (m \cdot q + s)$. Според тоа, $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $m \mid m \cdot (p - q) + (r - s)$, односно ако и само ако $m \mid (r - s)$. Бидејќи $-m < r - s < m$, следува дека $m \mid (r - s)$ ако и само ако $r - s = 0$. Значи $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $r = s$.

Пример 2

$47 \equiv 35 \pmod{12}$ бидејќи при делење и на 47 и на 35 со 12 се добива остаток 11. Слично, имаме $5 \equiv 25 \pmod{4}$; $3472 \equiv 24472 \pmod{1000}$; $28 \not\equiv 14 \pmod{3}$; $15 \not\equiv 8 \pmod{3}$.

Конгруенциите имаат многу својства што ги има обичната еднаквост. На пример, нека a и b се позитивни цели броеви и нека $a \equiv b \pmod{100}$. Тоа значи дека $100 \mid (a - b)$, односно дека двоцифрениот завршеток на бројот $a - b$ е нула. Според тоа, a и b имаат еднакви двоцифрени завршетоци. И обратно, ако a и b имаат еднакви двоцифрени завршетоци, тогаш $100 \mid (a - b)$, што значи дека $a \equiv b \pmod{100}$. Според тоа, два позитивни броја се конгруентни по модул 100 ако и само ако нивните двоцифрени завршетоци се еднакви. Бидејќи двоцифрениот завршеток на збирот на два позитивни броја зависи само од двоцифрените завршетоци на собироците, добиваме дека ако a, b, c и d се позитивни природни броеви и ако: $a \equiv b \pmod{100}$ и $c \equiv d \pmod{100}$, тогаш $a + c \equiv b + d \pmod{100}$ и $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{100}$.

Ќе докажеме некои од основните својства на конгруенциите. Притоа ќе сметаме дека m е секогаш позитивен цел број.

Теорема 2. (1) За секој цел број a , $a \equiv a \pmod{m}$.

(2) Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш $b \equiv a \pmod{m}$.

(3) Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, тогаш $a \equiv c \pmod{m}$.

(4) Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, тогаш $a + c \equiv b + d \pmod{m}$,
 $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ и $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

Доказ. (1) Од $a - a = 0$ и $m \mid 0$, следува $a \equiv a \pmod{m}$.

(2) Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш $m \mid (a - b)$. Бидејќи $m \mid (a - b)$, $b - a = (-1)(a - b)$, следува дека $m \mid (b - a)$, па значи $b \equiv a \pmod{m}$.

(3) Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, тогаш $m \mid (a - b)$ и $m \mid (b - c)$. Според тоа, $m \mid (a - b) + (b - c)$, т. е. $m \mid (a - c)$. Значи $a \equiv c \pmod{m}$.

(4) Од $m \mid (a - b)$, $m \mid (c - d)$, $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$,
 $(a - c) - (b - d) = (a - b) - (c - d)$ и $ac - bd = c(a - b) + b(c - d)$ следува дека
 $m \mid [(a + c) - (b + d)]$, $m \mid [(a - c) - (b - d)]$ и $m \mid (a \cdot c - b \cdot d)$.

Според тоа, $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ и $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

Да забележиме дека според теорема 2 релацијата „... е конгруентен со ... по модул ...“ е релација за еквивалентност во множеството цели броеви.

Претходната теорема, всушност, покажува дека релацијата $\equiv$ е согласна со операциите собирање, одземање и множење на цели броеви.

Од претходната теорема непосредно следуваат следните:

Последица 1. Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш за секој цел број c важат следните конгруенции: $a + c \equiv b + c \pmod{m}$, $a - c \equiv b - c \pmod{m}$ и $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$.

Последица 2. Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш за секој природен број n , $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Теорема 3. $f(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.

Доказ. Нека $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$, каде што $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ се цели броеви. Тогаш од теоремата 2 и последиците 1 и 2, следува дека:

$$a_k a^k + a_{k-1} a^{k-1} + \dots + a_0 \equiv a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_0 \pmod{m}, \text{ односно } f(a) \equiv f(b) \pmod{m}.$$

Пример 3 Докажи дека $10 \mid (3^{2004} - 1)$.

Решение. Од $3^4 = 81$ следува дека $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Според тоа, $(3^4)^{501} \equiv 1^{501} \pmod{10}$, односно $3^{2004} \equiv 1 \pmod{10}$. Значи, $10 \mid (3^{2004} - 1)$.

Пример 4 Докажи дека $17 \mid (3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})$ за секој $n \geq 0$.

Решение. Од тоа што $5^2 = 25 \equiv 8 \pmod{17}$ и $2^3 = 8$ следува дека

$$3 \cdot 5^{2n+1} = 3 \cdot 5 \cdot (5^2)^n \equiv 3 \cdot 5 \cdot 8^n \equiv (-2) \cdot 8^n \pmod{17}.$$

Од $2^{3n+1} = 2 \cdot 8^n$ следува дека $(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}) \equiv ((-2) \cdot 8^n) + 2 \cdot 8^n \equiv 0 \pmod{17}$.

Значи, $17 \mid (3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})$.

Пример 5. Од $12 \equiv 8 \pmod{4}$ и $4 \equiv 4 \pmod{4}$ не следува дека $12:4 \equiv 8:4 \pmod{4}$, бидејќи $3 \not\equiv 2 \pmod{4}$.

Од претходниот пример заклучуваме дека релацијата $\equiv$ не е согласна со операцијата делење на цели броеви. Условите при кои може двете страни во конгруенцијата да се поделат со некој број се дадени во следната:

Теорема 4. (1) Ако $\text{НЗД}(a, m) = 1$ и $a \cdot b \equiv a \cdot c \pmod{m}$, тогаш: $b \equiv c \pmod{m}$.
(2) Ако $\text{НЗД}(a, m) = d$ и $a \cdot b \equiv a \cdot c \pmod{m}$, тогаш: $b \equiv c \pmod{n}$, каде што $n = \frac{m}{d}$.

Доказ. Ќе го докажеме тврдењето (2) од каде следува тврдењето (1) за $d = 1$.

Нека $\text{НЗД}(a, m) = d$ и $a \cdot b \equiv a \cdot c \pmod{m}$. Постојат цели броеви n и r такви што $n \cdot d = m$, $r \cdot d = a$ и $\text{НЗД}(n, r) = 1$. Од $a \cdot b \equiv a \cdot c \pmod{m}$ следува дека постои цел број k таков што $a \cdot b = a \cdot c + k \cdot m$. Ако последното равенство го поделеме со d , добиваме $r \cdot b = r \cdot c + k \cdot n$ од што следува дека $r \cdot (b - c) = k \cdot n$. Бидејќи $\text{НЗД}(n, r) = 1$, односно n и r немаат заеднички делители и бидејќи $n \mid r \cdot (b - c)$ следува дека $n \mid (b - c)$. Значи, $n \mid (b - c)$, од што следува дека $b \equiv c \pmod{n}$.

Теорема 5. Ако $a \equiv b \pmod{n}$, $a \equiv b \pmod{m}$ и $k = \text{НЗС}(m, n)$, тогаш $a \equiv b \pmod{k}$.

Доказ. Нека $\text{НЗД}(m, n) = t$. Тогаш $n = t \cdot p$ и $m = t \cdot q$ каде што $\text{НЗД}(p, q) = 1$. Тогаш $\text{НЗС}(n, m) = t \cdot p \cdot q$. Од $n \mid (a - b)$ и $m \mid (a - b)$, следува дека $t \cdot p \mid (a - b)$ и $t \cdot q \mid (a - b)$. Нека $a - b = r \cdot t \cdot p$ и нека $a - b = s \cdot t \cdot q$. Бидејќи $r \cdot p = s \cdot q$ и $\text{НЗД}(p, q) = 1$, следува дека $q \mid r$. Според тоа, $t \cdot p \cdot q \mid (a - b)$, односно $a \equiv b \pmod{k}$.

Пример 6. Даден е триномот $9n^2 + 3n - 2$, каде што n е цел број. Докажи дека:

а) ниту за еден n овој трином не е делив со 9;

б) постојат бесконечно многу цели броеви за кои овој трином е делив со 4.

Решение. а) Нека $f(n) = 9n^2 + 3n - 2$. Од $f(n) \equiv 1 \pmod{3}$, следува дека $9 \nmid f(n)$.

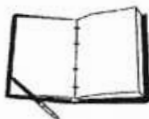
б) Лесно се проверува дека:

$$f(4k) \equiv -2 \pmod{4}, f(4k+1) \equiv 2 \pmod{4}, f(4k+2) \equiv 0 \pmod{4}, f(4k+3) \equiv 0 \pmod{4}.$$

Значи, за секој n за кој $n = 4k+2$ или $n = 4k+3$, триномот $9n^2 + 3n - 2$ е делив со 4.

Теорема 6. Ако $x \equiv y \pmod{m}$, тогаш $\text{НЗД}(x, m) = \text{НЗД}(y, m)$.

Доказ. Нека $\text{НЗД}(x, m) = d$ и $\text{НЗД}(y, m) = k$. Од $x \equiv y \pmod{m}$ следува дека постои $z \in \mathbb{Z}$ таков што $y - x = mz$. Од $d \mid x$ и $d \mid m$ следува дека $d \mid y$, што значи дека $d \mid k$. На ист начин се докажува дека $k \mid d$. Според тоа, $\text{НЗД}(y, m) = \text{НЗД}(x, m)$.



Задачи за самостојна работа

1. Провери дали важат конгруенциите:
а) $56 \equiv 12 \pmod{11}$, б) $28 \equiv -2 \pmod{7}$, в) $\overline{abcabc} \equiv 0 \pmod{13}$.
2. Докажи дека, ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $d|m$, тогаш $a \equiv b \pmod{d}$.
3. Докажи дека ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $c > 0$, тогаш $ac \equiv bc \pmod{mc}$.
4. Докажи дека за секој $k \in \mathbb{N}$ и секои $a, b \in \mathbb{Z}$ за кои $a \neq b$, $a^k - b^k$ е делив со $a - b$.
5. Докажи дека за секој $k \in \mathbb{N}$ и секои $a, b \in \mathbb{Z}$ за кои $a + b \neq 0$, бројот $a^{2k-1} + b^{2k-1}$ е делив со $a + b$.
6. а) Докажи дека за секој $a \in \mathbb{Z}$, a^2 е конгруентен со 0 или со 1 по модул 4.
б) Докажи дека за секој $a \in \mathbb{Z}$, a^2 е конгруентен со 0, 1 или 4 по модул 8.
7. Докажи дека за $c = 2$, $n = 7$, $a = 2$, $b = 9$, $c^a \not\equiv c^b \pmod{n}$, иако $a \equiv b \pmod{n}$.
8. На која цифра завршува бројот:
а) 6^{811} , б) 2^{1000} , в) 3^{9999} .
9. Најди го остатокот при делењето на:
а) $(5^{100} + 55)^{100}$ со 24, б) $(3^{10} + 2)^{77}$ со 9, в) $(116^{100} + 17^{17})^{21}$ со 8.
10. Провери дали броевите $13^{101} - 13^{95}$ и $3^{103} + 5^{105}$ се деливи со 7.
11. Докажи дека бројот $2222^{5555} + 5555^{2222}$ е делив со 7.
12. Докажи дека за секои $k, t, m \in \mathbb{N}$, збирот $3^{5k} + 4^{5t+2} + 5^{5m+1}$ е делив со 11.
13. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$:
а) $49 | (5 \cdot 3^{4n+2} + 53 \cdot 2^{5n})$, б) $14 | (2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3})$,
в) $11 | (2^{6n+1} + 3^{2n+2})$, г) $57 | (7^{n+2} + 8^{2n+1})$,
д) $37 | (2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1})$, е) $17 | (2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2})$,
е) $25 | (72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1})$.
14. Докажи дека не постои полином $f(x)$ со целобројни коефициенти и степен ≥ 1 таков што $f(c)$ е прост број за секој цел број c .
15. а) Нека $\text{НЗД}(a, m) = 1$. Докажи дека постојат $s, k \in \mathbb{Z}$ така што $as + mk = 1$.
б) Нека $\text{НЗД}(a, m) = d$. Докажи дека постојат $s, k \in \mathbb{Z}$ така што $as + mk = d$.

2.4. Системи на остатоци

Како што претходно спомнавме, релацијата „...е конгруентен со... по модул m “ е релација за еквиваленција во множеството цели броеви. Оваа релација го разбива множеството $\mathbb{Z}$ на m дисјунктни класи на еквиваленција. Исто така, бидејќи за секој $a \in \mathbb{Z}$ постојат единствени $q, r \in \mathbb{Z}$ такви што $0 \leq r < m$ и $a = qm + r$, следува дека секој цел број е конгруентен по модул m со еден и само еден од броевите $0, 1, 2, \dots, m-1$. За $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < m$ нека $C(m, r) = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \text{ и } a \equiv r \pmod{m}\}$. Множеството $C(m, r)$ се нарекува **класа на конгруенцијата** по модул m . За овие множества е точна следнава теорема.

Теорема 1.

Ако $m > 0$, $0 \leq r, s < m$, $r \neq s$, тогаш:

- а) $C(m, r) \cap C(m, s) = \emptyset$; и
- б) $C(m, 0) \cup C(m, 1) \cup \dots \cup C(m, m-1) = \mathbb{Z}$.

Пример 1 $C(2, 0) = \{2a \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $C(2, 1) = \{2a+1 \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Во овој специјален случај двете класи имаат специјални имиња: парни и непарни броеви.

Дефиниција 1.

Едно множество $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ од цели броеви го нарекуваме **комплетен систем на остатоци по модул m** ако за $0 \leq r < m-1$, $x_r \in C(m, r)$.

Непосредно од дефиницијата следува дека едно множество $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ од цели броеви е комплетен систем на остатоци по модул m ако за секој $a \in \mathbb{Z}$ постои еден и само еден x_i таков што $a \equiv x_i \pmod{m}$.

Пример 2 Најчесто користени комплетни системи остатоци по модул m се:

$\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ и $\{1, 2, 3, \dots, m\}$,
а кога $m = 2k+1$ се користи и $\{-k, -k+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, k\}$.

Теорема 2.

Нека $\text{НЗД}(a, m) = 1$ и $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ е комплетен систем на остатоци по модул m . Тогаш за секој $b \in \mathbb{Z}$ множеството $T = \{aa_1 + b, aa_2 + b, \dots, aa_m + b\}$ е, исто така, комплетен систем на остатоци по модул m .

Доказ. Ако $aa_i + b \equiv aa_t + b \pmod{m}$ од што следува дека $aa_i \equiv aa_t \pmod{m}$. Бидејќи $\text{НЗД}(a, m) = 1$, од последната конгруенција следува дека $a_i \equiv a_t \pmod{m}$, па $i = t$, затоа што S е комплетен систем на остатоци. Значи T содржи m елементи од различни класи, а бидејќи класи има точно m , добиваме дека T е комплетен систем на остатоци.

Пример 3 Од тоа што $0^2 \equiv 0 \pmod{5}$, $1^2 \equiv 1 \pmod{5}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{5}$, $3^2 \equiv 4 \pmod{5}$, $4^2 \equiv 1 \pmod{5}$ и $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ е комплетен систем остатоци по модул 5, следува дека квадрат на природен број при делење со 5 не може да има остаток 2 или 3.

Пример 4 Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот $n^3 + 5n$ е делив со 6.

Решение. Комплетен систем остатоци по модул 6 е $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Според тоа, доволно е да се испита дали $n^3 + 5n$ е делив со 6 за $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Од $0^3 \equiv 0 \pmod{6}$, $1^3 \equiv 1 \pmod{6}$,

$2^3 \equiv 2 \pmod{6}$, $3^3 \equiv 3 \pmod{6}$, $4^3 \equiv 4 \pmod{6}$, $5^3 \equiv 5 \pmod{6}$ следува дека $n^3 \equiv n \pmod{6}$, а оттука добиваме $n^3 + 5n \equiv 6n \equiv 0 \pmod{6}$.

Дефиниција 2. Нека $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ е комплетен систем на остатоци по модул m и нека $S' \subseteq S$ се состои од сите броеви во S , кои се заемно прости со m . Тогаш S' се нарекува редуциран систем на остатоци по модул m .

Пример 5 Редуциран систем остатоци: по модул 4 е $\{1, 3\}$; по модул 8 е $\{1, 3, 5, 7\}$; по модул 5 е $\{1, 2, 3, 4\}$; по модул 10 е $\{1, 3, 7, 9\}$.

Теорема 3. Ако $\text{НЗД}(a, m) = 1$ и S' е редуциран систем на остатоци по модул m , тогаш a е конгруентен со единствен број од S' . Ако S'' е друг редуциран систем на остатоци по модул m , тогаш S' и S'' имаат ист број елементи.

Доказ. Од дефиниција 2 следува дека $S' \subseteq S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, каде што S е комплетен систем на остатоци. Но, S е комплетен систем на остатоци, па затоа постои единствен број $b \in S$, таков што $a \equiv b \pmod{m}$. Од $\text{НЗД}(a, m) = 1$ следува дека и $\text{НЗД}(b, m) = 1$, па значи $b \in S'$. Бидејќи b е единствен во S , тој е единствен и во S' .

Нека S'' е друг редуциран систем на остатоци по модул m . Секој елемент од S'' е конгруентен со точно еден елемент од S' , а бидејќи два различни елементи од S' не се конгруентни, добиваме дека бројот на елементите на S' е поголем или еднаков со бројот на елементите од S'' . Ако ги замениме местата на S' и S'' добиваме дека бројот на елементите на S'' е поголем или еднаков на бројот на елементите на S' . Значи, S' и S'' имаат ист број елементи.

Теорема 4. Ако $m > 1$ и S' е редуциран систем на остатоци по модул m , тогаш бројот на сите природни броеви помали или еднакви на m и заемно прости со m е еднаков на бројот на елементите на S' .

Доказ. Бидејќи $S = \{1, 2, \dots, m\}$ е комплетен систем на остатоци по модул m , добиваме дека $S'' = \{k \mid k \in S, \text{НЗД}(m, k) = 1\}$ е редуциран систем на остатоци по модул m . Сега тврдењето следува од претходната теорема.



Задачи за самостојна работа

- Најди ги класите на конгруенција по:
 - модул 3,
 - модул 4,
 - модул 7.
- Докажи дека секое множество од m последователни цели броеви е комплетен систем остатоци по модул m .
- Докажи дека $\{2, 4, \dots, 2m\}$ е комплетен систем остатоци по модул m , за m непарен број.
- Кои броеви не се остатоци при делење на квадрат од природен број со 10?

5. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$:

- а) $4^n + 15n - 1 \equiv 0 \pmod{9}$, б) $n^3 + 11n \equiv 0 \pmod{6}$, в) $n^3 + 17n \equiv 0 \pmod{6}$,
 г) $n^5 - n \equiv 0 \pmod{30}$, д) $n^7 - n \equiv 0 \pmod{7}$, ф) $n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod{6}$.

6. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот $4n^7 + 4$ не е делив со 19.

7. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ е делив со 17.

8. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот $5 \cdot 3^{4n+2} + 53 \cdot 2^{5n}$ е делив со 49.

9. Најди редуцирани системи остатоци по модул: 9; 18; 21; 34; 88, а потоа најди по колку елементи има секој од нив.

10. Најди два примери на редуцирани системи остатоци $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ по модул n за кои $S = \{a_1 + 2, a_2 + 2, \dots, a_m + 2\}$ не е редуциран систем остатоци по модул n .

2.5. Ојлерова функција и нејзините својства

Дефиниција 1. Бројот на природни броеви кои не се поголеми од даден природен број m и се заемно прости со него, односно бројот на елементите на произволен редуциран систем на остатоци по модул m се означува со $\phi(m)$. Функцијата ϕ се вика Ојлерова функција.

Неколку први вредности на $\phi(m)$ дадени се со следната табела:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\phi(m)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

Бидејќи за секој прост број p сите елементи на множеството $\{1, 2, \dots, p-1\}$ освен p се заемно прости со p , добиваме дека $\phi(p) = p-1$. Да разгледаме некои својства на Ојлеровата функција.

Теорема 1. Ојлеровата функција ϕ е мултипликативна, т.е. $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n)$ за секои $m, n \in \mathbb{N}$.

Доказ. Јасно е дека $\phi(1) = 1 \neq 0$. Нека $\text{НЗД}(m, n) = 1$, треба да се одреди бројот $\phi(m \cdot n)$ на броевите од следната табела кои се заемно прости со $m \cdot n$.

1	2	...	k	...	n
n+1	n+2	...	n+k	...	2n
...	...	...	...	...	...
(m-1)n+1	(m-1)n+2	...	(m-1)n+k	...	mn

Можеме да воочиме дека ако за некој k и некој $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ бројот $in+k$ е заемно прост со n , тогаш за секој $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ бројот $jn+k$ е заемно прост со n . Со други зборови, во која било колона од дадената табела или сите броеви се заемно прости со n или ниту еден не е заемно прост со n . Колони во кои сите броеви се заемно прости со n има $\phi(n)$. Бидејќи $\text{НЗД}(m, n) = 1$, во секоја таква колона има $\phi(m)$ броеви кои се заемно прости со m . Затоа вкупниот број на броеви во табелата кои се заемно прости со $m \cdot n$ е еднаков со $\phi(m) \cdot \phi(n)$. Со тоа е докажано дека $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n)$.

Теорема 2.

Ако е $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ каноничната факторизација на бројот n како производ од степени на различни прости броеви, тогаш:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Доказ. Ако p е прост број, тогаш во низата $1, 2, \dots, p, \dots, p \cdot p, \dots, p^{\alpha-1} \cdot p$ има $p^{\alpha-1}$ броеви деливи со p , па $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$. Оттука и од претходната теорема добиваме:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(p_k^{\alpha_k}) = \\ &= p_1^{\alpha_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot p_2^{\alpha_2} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \end{aligned}$$

со што е докажана теоремата.

Пример 1 $\varphi(120) = \varphi(2^3 \cdot 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot (2-1) \cdot (3-1) \cdot (5-1) = 32$.

Теорема 3.

Ако е $n \geq 1$ тогаш $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Доказ. Нека $f(n) = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Од Теорема 1, од делот 2.2, бидејќи функцијата φ е мултипликативна, следува дека и функцијата f е мултипликативна. Така, доволно е да пресметаме колку е $f(p^a)$ каде што p е прост број и $a \geq 1$. Бидејќи сите делители на p^a се: $1, p, p^2, \dots, p^a$, следува дека:

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{d|n} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \dots + \varphi(p^a) = 1 + p\left(1 - \frac{1}{p}\right) + p^2\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \dots + p^a\left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= 1 + (p-1) + (p^2-p) + (p^3-p^2) + \dots + (p^a - p^{a-1}) = p^a. \end{aligned}$$

Според тоа, ако е $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ каноничната факторизација на бројот n како производ од степени на различни прости броеви, тогаш:

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \varphi(p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(p_k^{\alpha_k}) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = n.$$
**Задачи за самостојна работа**

1. Најди ги: $\varphi(20)$, $\varphi(60)$, $\varphi(63)$, $\varphi(341)$, $\varphi(561)$.
2. Докажи дека $\varphi(2m) = \varphi(m)$ за непарен број m , додека $\varphi(2m) = 2\varphi(m)$ за парен број m .
3. Каква е врската помеѓу $\varphi(m \cdot n)$ и $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$, кога $\text{НЗД}(n, m) > 1$?
4. Нека S е комплетен систем остатоци по модул m и a е број за кој $\text{НЗД}(a, m) = d$. Колку броеви од множеството $\{a \cdot x \mid x \in S\}$ се деливи со m ?
5. Докажи $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot \frac{d}{\varphi(d)}$, за m, n за кои $\text{НЗД}(n, m) = d$.

6. Најди ги сите природни броеви m за кои е:

а) $\varphi(m)=10$,

б) $\varphi(m)=8$,

в) $\varphi(m)=14$.

7. Нека x е најмалиот природен број за кој $2^x \equiv 1 \pmod{63}$. Најди го x и докажи дека $x|\varphi(63)$.

2.6. Теорема на Ојлер, Ферма и Вилсон

Теорема 1.

Нека S' е редуциран систем на остатоци по модул m и нека a е природен број за кој $\text{НЗД}(a,m)=1$. Тогаш и множеството $T'=\{a \cdot x \mid x \in S'\}$ е исто така редуциран систем на остатоци по модул m .

Доказ. Да го прошириме S' до комплетен систем на остатоци по модул m , означен со S . Тогаш, според теорема 2 од делот 2.4. и множеството $T=\{a \cdot x \mid x \in S\}$ е комплетен систем на остатоци по модул m . Од друга страна, $T' \subseteq T$. Бидејќи $\text{НЗД}(a,m)=1$, сите броеви од T' се заемно прости со m . Од тоа што S' и T' имаат ист број елементи, следува дека и T' е редуциран систем на остатоци по модул m .

Теорема 2.

(Теорема на Ојлер) Ако $\text{НЗД}(a,m)=1$, тогаш $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Доказ. Нека $\{a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}\}$ е редуциран систем на остатоци по модул m . Според теорема 1, и $\{aa_1, aa_2, \dots, aa_{\varphi(m)}\}$ е редуциран систем на остатоци по модул m . Значи, за секој a_i постои еден и само еден a_j таков што $a_i \equiv aa_j \pmod{m}$. Ако ги помножиме сите конгруенции од овој облик, ги има точно $\varphi(m)$, добиваме

$$a^{\varphi(m)} a_1 a_2 \dots a_{\varphi(m)} \equiv a_1 a_2 \dots a_{\varphi(m)} \pmod{m}.$$

Од оваа конгруенција и од $\text{НЗД}(a,m)=1$, следува дека $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Пример 1 Докажи дека $2^{340} - 1$ не е прост број.

Решение. Од теоремата на Ојлер следува дека $2^{10} = 2^{\varphi(11)} \equiv 1 \pmod{11}$. Значи:

$$2^{340} = (2^{10})^{34} \equiv 1^{34} \pmod{11}, \text{ односно } 11 \mid (2^{340} - 1).$$

Според тоа, $2^{340} - 1$ не е прост број.

Теорема 3.

(Теорема на Ферма) Ако p е прост број и $\text{НЗД}(a,p)=1$, тогаш:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Доказ. Од $\text{НЗД}(a,p)=1$ и од теорема 1, следува дека $a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$, а од тоа што $\varphi(p)=p-1$, следува дека $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Последица 1.

Ако p е прост број и $a \in \mathbb{Z}$, тогаш $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Во разни задачи често е потребно да се најде најмал број $t \in \mathbb{N}$ за кој $a^t \equiv 1 \pmod{m}$.

Дефиниција 1.

Најмалиот природен број t за кој $a^t \equiv 1 \pmod{m}$ се вика ред на бројот a по модул m .

Пример 2

Редот на бројот 3 по модул 11 е еднаков на 5, бидејќи

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4 \not\equiv 1 \pmod{11}, \text{ а } 3^5 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Од Ојлеровата теорема следува дека ако за еден број a , $\text{НЗД}(a, m) = 1$, тогаш постои ред на бројот a по модул m .

Важи и обратното: ако $a^t \equiv 1 \pmod{m}$ за некој t , тогаш $1 = a^t - mn$, од каде што следува дека $\text{НЗД}(a, m) = 1$.

Пример 3

Докажи дека за различни прости броеви p и q , $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

Решение. Од теоремата на Ферма следува дека $q \mid (p^{q-1} - 1)$ и $p \mid (q^{p-1} - 1)$.

Но, тоа значи дека $pq \mid (p^{q-1} - 1)(q^{p-1} - 1)$, односно

$$(1) \quad pq \mid (p^{q-1}q^{p-1} - p^{q-1} - q^{p-1} + 1).$$

Бидејќи p и q се прости броеви, имаме $p, q \geq 2$, од каде што следува дека

$$(2) \quad pq \mid p^{q-1}q^{p-1}.$$

Од (1) и (2) непосредно следува дека $pq \mid (p^{q-1} + q^{p-1} - 1)$, односно $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

Теорема 4.

Ако e е редот на бројот a по модул m и $a^s \equiv 1 \pmod{m}$ тогаш $t \mid s$. Специјално, $t \mid \phi(m)$.

Доказ. Ако $s = tq + r$, $0 < r < t$, тогаш $a^s = (a^t)^q \cdot a^r$, значи $a^r \equiv 1 \pmod{m}$, што противречи на минималноста на редот t .

Пример 4

Лесно се проверува дека $\phi(22) = 10$. Затоа редовите по модул 22 на броевите 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21 (кои се заемно прости со 22) може да бидат само 1, 2, 5 или 10. Така, на пример, редот на 3 е 5, бидејќи $3^1, 3^2 \not\equiv 1 \pmod{22}$, $3^5 \equiv 1 \pmod{22}$, а редот на 7 е 10, бидејќи $7^1, 7^2, 7^5 \not\equiv 1 \pmod{22}$, а $7^{10} \equiv 1 \pmod{22}$.

Последица 2.

Ако t е редот на бројот a по модул m , тогаш $a^x \equiv a^y \pmod{m}$ ако и само ако $x \equiv y \pmod{t}$.

Доказ. Без губење на општост, нека $x \geq y$. Ако $a^x \equiv a^y \pmod{m}$, од $\text{НЗД}(a, m) = 1$, следува дека $a^{x-y} \equiv 1 \pmod{m}$, па од претходната теорема следува дека $t \mid (x - y)$. Обратно, од $x \equiv y \pmod{t}$ следува $x = y + t\alpha$, $\alpha \geq 0$ и $a^x = a^{y+t\alpha} = a^y \cdot (a^t)^\alpha \equiv a^y \pmod{m}$.

За некои броеви, редот по модул m може да биде и еднаков на $\phi(m)$.

Дефиниција 2.

Ако редот на бројот a по модул m е еднаков на $\phi(m)$, тогаш бројот a го викаме примитивен корен по модул m .

Пример 5 Да ги разгледаме остатоците $1, 2, 3, -3, -2, -1$ по модул 7 ($\varphi(7) = 6$). Лесно се проверува дека нивните редови по модул 7 се еднакви, на $1, 3, 6, 3, 6, 2$, соодветно. Броевите 3 и -2 се примитивни корени по модул 7 .

Може да се докаже дека единствени броеви кои имаат примитивни корени се: $1, 2, 4$ и броевите од облик p^α или $2p^\alpha$ за p непарен број. Ако p е прост број, тогаш бројот на примитивни корени по модул p е $\varphi(p-1)$.

Теорема 5. Ако бројот a е примитивен корен по модул m , тогаш броевите $1 = a^0, a, a^2, \dots, a^{\varphi(m)-1}$ образуваат редуциран систем на остатоци по модул m .

Доказ. Ако $a^k \equiv a^l \pmod{m}$, $0 \leq l < k < \varphi(m)$, тогаш од $\text{НЗД}(a, m) = 1$, следува дека $a^{k-l} \equiv 1 \pmod{m}$, $0 \leq k-l < \varphi(m)$, што е спротивно на претпоставката дека a е примитивен корен.

Последица 3. Ако p е прост број и a примитивен корен по модул p , тогаш броевите $1, a, a^2, \dots, a^{p-2}$ образуваат редуциран систем на остатоци по модул p .

Пример 6 Бројот 2 е примитивен корен по модул 11 , па тогаш броевите $1, 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 \equiv 5, 2^5 \equiv 10, 2^6 \equiv 9, 2^7 \equiv 7, 2^8 \equiv 3, 2^9 \equiv 6 \pmod{11}$ образуваат редуциран систем на остатоци по модул 11 .

Теорема 6. (Теорема на Вилсон) Ако p е прост број, тогаш $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Доказ. За $p=2$ и $p=3$ непосредно проверуваме дека теоремата важи. Нека претпоставиме дека $p \geq 5$.

Да забележиме дека $1 \equiv 1 \pmod{p}$ и $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$. За секој j , за кој $2 \leq j \leq p-2$ важи $\text{НЗД}(j, p) = 1$, па според тоа, постои еден и само еден i таков што $ji \equiv 1 \pmod{p}$ и $0 \leq i \leq p-1$. Очигледно $i \notin \{0, 1, p-1\}$, од што следува дека за секој j , за кој $2 \leq j \leq p-2$, важи $\text{НЗД}(j-1, p) = \text{НЗД}(j+1, p) = 1$. Според тоа, $j^2 - 1 = (j-1)(j+1) \not\equiv 0 \pmod{p}$. На овој начин, броевите $2, 3, \dots, p-2$ ги поделивме на $(p-3)/2$ дисјунктни двоелементни множества $\{i, j\}$ за кои важи $ij \equiv 1 \pmod{p}$. Ако ги помножиме овие конгруенции добиваме $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (p-2) \equiv 1 \pmod{p}$.

Последната конгруенција ја помножиме со конгруенцијата $1 \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$ и добиваме $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Пример 7 Докажи дека ако $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$, тогаш m е прост број.

Решение. Нека m не е прост број. Тогаш, $(m-1)! \equiv 0 \pmod{m}$, односно $(m-1)! + 1 \equiv 1 \pmod{m}$, што противречи на претпоставката дека $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$.



Задачи за самостојна работа

1. Докажи дека за секој природен број n , бројот $N = 1 + 2^{2 \cdot 5^n}$ се дели со 5^{n+1} .
2. Докажи дека $2730 \mid (n^{13} - n)$ за секој природен број n .
3. Нека p е прост непарен број. Докажи дека редот на бројот a по модул p е 2 ако и само ако $a \equiv -1 \pmod{p}$.
4. Нека p е прост број. Докажи дека $(p-1)! + 1$ е степен од бројот p ако и само ако $p = 2$, $p = 3$ или $p = 5$.
5. Нека p е прост број. Докажи дека $p^3 \mid [(p!)^2 - p^2]$.
6. Еден сложен број n се нарекува **псевдопрост** ако $n \mid (2^n - 2)$. Докажи дека 341 и 561 се псевдопрости.
7. Докажи дека за секој број a , $a^{561} \equiv a \pmod{561}$.
8. Докажи дека: $3^3 \equiv -4 \pmod{31}$, $3^{10} \equiv -6 \pmod{31}$, $3^{341} \not\equiv 3 \pmod{31}$ и $3^{341} \not\equiv 3 \pmod{341}$.
9. Најди сложен број n помал од 10 за кој $n \mid (3^n - 3)$.
10. Докажи дека ако $\text{НЗД}(a, 561) = 1$, тогаш $a^{80} \equiv 1 \pmod{561}$.

2.7. Системи линеарни конгруентни равенки

Дефиниција 1. Равенка од облик

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_k \cdot x_k \equiv b \pmod{n} \quad (1)$$

со непознати $x_1, x_2, \dots, x_k$ и целобројни коефициенти $a_1, a_2, \dots, a_k$ ја нарекуваме линеарна конгруентна равенка со k променливи.

Решение на оваа равенка е множеството од сите k -торки цели броеви кои ја задоволуваат равенката. Од дефиницијата на конгруенции следува дека линеарната конгруентна равенка (1) е еквивалентна со Диофантовата равенка

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_k \cdot x_k - n \cdot x_{k+1} = b \quad (2)$$

со $k+1$ непознати. Равенката (2) или нема ниедно решение, или има бесконечно многу решенија, т. е. или решението е празно множество или решението содржи бесконечно многу $k+1$ -торки цели броеви. Според тоа истото важи и за равенката (1). Во случај кога $k=1$, знаеме како да најдеме решение на (2) (кога тоа постои), па според тоа знаеме како да најдеме решение и на (1). При решавање на (1) ние сакаме да ги најдеме сите различни решенија по модул n , што значи дека две различни решенија на равенката (1) се еднакви по модул n , ако различните вредности на x_j се конгруентни по модул n , за секој j . На пример, решението $x=2, y=2, z=3$ на равенката $x+y+z \equiv -1 \pmod{7}$ е исто по модул 7 со решението $x=8, y=-5, z=17$, но не е исто по модул 7 со решението $x=1, y=4, z=1$. Специјално, кога постои само едно решение по модул n велиме дека решението на равенката (1) е единствено по модул n .

Пример 1 Равенката $14 \cdot x \equiv 13 \pmod{21}$ нема решение бидејќи $\text{НЗД}(14,21)=7$ и $7 \nmid 13$.

Пример 2 Да ја решиме равенката $9 \cdot x \equiv 15 \pmod{21}$.

Решение. Бидејќи $\text{НЗД}(9,21)=3$ и $3 \mid 15$, следува дека равенката има решение. Делејќи со 3 ја добиваме равенката $3 \cdot x \equiv 5 \pmod{7}$. Според тоа, $3 \cdot x \equiv 5+7 \pmod{7}$, т. е. $3 \cdot x \equiv 12 \pmod{7}$. Но, бидејќи $\text{НЗД}(3,7)=1$, од теорема 4 од делот 2.4, следува дека $x \equiv 4 \pmod{7}$. Значи $x=4$ е решение по модул 7. Сега да се вратиме на равенката $9 \cdot x \equiv 15 \pmod{21}$. Таа има единствено решение во секој комплетен систем на остатоци по модул 7. Според тоа, во множеството броеви $0,1,2,3,4,5,6$ равенката $9 \cdot x \equiv 15 \pmod{21}$ има единствено решение $x=4$; во множеството $7,8,9,10,11,12,13$ равенката $9 \cdot x \equiv 15 \pmod{21}$ има единствено решение $x=11$; и во множеството $14,15,16,17,18,19,20$ равенката $9 \cdot x \equiv 15 \pmod{21}$ има единствено решение $x=18$. Овие три множества формираат комплетен систем на остатоци по модул 21. Според тоа равенката $9 \cdot x \equiv 15 \pmod{21}$ има три решенија по модул 21 и тие се: $x=4, x=4+7=11, x=11+7=18$.

Пример 3 Да ги решиме равенките:

а) $14 \cdot x \equiv 5 \pmod{45}$;

б) $5 \cdot x \equiv 30 \pmod{55}$.

Решение. а) Бидејќи $\text{НЗД}(14,45)=1$, следува дека равенката има единствено решение.

Ако собереме со 45 три пати, бидејќи $0 \equiv 45 \pmod{45}$, добиваме $14 \cdot x \equiv 5 + 45 + 45 + 45 \equiv 140 \pmod{45}$. Значи равенката има единствено решение $x=10$ по модул 45.

б) Бидејќи $\text{НЗД}(5,55)=5$ и $5 \mid 30$, равенката има решение. Ако поделиме со 5 добиваме $x \equiv 6 \pmod{11}$. Според тоа, равенката $5 \cdot x \equiv 30 \pmod{55}$ има 5 решенија по модул 55, а тие се $x=6, x=6+11=17, x=17+11=28, x=28+11=39, x=39+11=50$.

Теорема 1. Линеарната конгруентна равенка $ax \equiv b \pmod{n}$ (3)

има решение ако и само ако $d \mid b$, каде што $d = \text{НЗД}(a,n)$. Притоа, ако d е делител на b , тогаш решението е единствено по модул n/d . Ако $d=1$, тогаш равенката (3) има решение и тоа единствено по модул n .

Теорема 2. Ако $\text{НЗД}(m,n)=1$ тогаш равенките

$$x \equiv a \pmod{m} \text{ и } x \equiv b \pmod{n}$$

имаат единствено решение по модул $m \cdot n$.

Теорема 3. (Кинеска теорема за остатоци) Нека $m_1, m_2, \dots, m_k$ се позитивни цели броеви кои се попарно заемно прости, т. е. $\text{НЗД}(m_i, m_j)=1$ за секои $i \neq j$. Тогаш равенките

$$x_1 \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x_2 \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

.....

$$x_k \equiv a_k \pmod{m_k}$$

(6)

имаат единствено решение по модул $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$.

Пример 4 Да се решат равенките:

$$x \equiv 2 \pmod{3} \text{ и } x \equiv 3 \pmod{4},$$

т.е. да се најдат заедничките решенија.

Решение. Бидејќи $\text{НЗД}(3,4)=1$, од теорема 2 следува дека дадените равенки имаат единствено решение по модул 12. Од $x \equiv 2 \pmod{3}$ следува дека $x = 2 + 3 \cdot k$, а од $x \equiv 3 \pmod{4}$ следува дека $x = 3 + 4t$. Се бара да се најдат заеднички решенија, т.е. да се најдат k и t , такви што $2 + 3 \cdot k = 3 + 4 \cdot t$, т.е. да се реши Диофантовата равенка $4 \cdot t - 3 \cdot k = -1$. Оваа равенка има решение бидејќи $\text{НЗД}(3,4)=1$. Едно решение е $t=2$ и $k=3$, т.е. $x=11$, што е единствено решение на дадените равенки по модул 12.

Теорема 4. Ако $\text{НЗД}(cf - ed, m) = 1$, тогаш равенките

$$cx + ey \equiv a \pmod{m}$$

$$dx + fy \equiv b \pmod{m}$$

(7)

имаат единствено заедничко решение x и y по модул m .

Доказ. Да претпоставиме дека постои решение на системот равенки (7). Ако првата ја помножиме со f , а втората со e и ги извадиме, тогаш

$$(cf - de)x \equiv af - be \pmod{m} \quad (8)$$

Ако ја помножиме првата равенка со d , втората со c и ја извадиме првата од втората равенка, добиваме

$$(cf - de)y \equiv bc - ad \pmod{m} \quad (9)$$

Бидејќи $\text{НЗД}(cf - ed, m) = 1$, од теорема 1, следува дека постои единствено решение x по модул m на равенката (8) и постои единствено решение y по модул m на равенката (9). Затоа, ако постои решение на (7), тоа е единствено по модул m .

Бидејќи $\text{НЗД}(cf - ed, m) = 1$ од Теорема 2, следува дека постои $z \in \mathbb{Z}$ таков што

$$z(cf - ed, m) \equiv 1 \pmod{m} \quad (10)$$

За вака определеното z го користиме за да ги решиме равенките (8) и (9). Така:

$$x \equiv z(cf - de)x \equiv z(af - be) \pmod{m} \quad (11)$$

$$y \equiv z(cf - de)y \equiv z(bc - ad) \pmod{m}$$

Сега ќе докажеме дека (7) има решение. Нека, x, y и z се дадени со (10) и (11).

Тогаш

$$cx + ey \equiv cz(af - be) + ez(bc - ad) \equiv azcf - azed \equiv az(cf - de) \equiv a \pmod{m}$$

$$dx + fy \equiv dz(af - be) + fz(bc - ad) \equiv fzbc - dzbc \equiv bz(cf - de) \equiv b \pmod{m}$$

Според тоа, постои заедничко решение на (7) и освен тоа докажавме дека тоа е единствено по модул m .

Пример 5 Реша ги следните системи конгруентни равенки:

а) $\begin{cases} x + 5y \equiv 5 \pmod{6} \\ 5x + 3y \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x - 5y \equiv 3 \pmod{6} \\ 2x + 2y \equiv -1 \pmod{6} \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y \equiv 2 \pmod{6} \\ 4x + 2y \equiv 2 \pmod{6} \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x - y \equiv 2 \pmod{6} \\ 2x + 2y \equiv 0 \pmod{6} \end{cases}$

Решение. а) $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{6} \\ y \equiv 0 \pmod{6} \end{cases}$ и $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ y \equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$

б) Системот нема решение бидејќи нема решение втората конгруентна равенка на системот. Имено, $\text{НЗД}(2,6) = 2$ и $2 \nmid (-1)$.

в) Множеството решенија на системот се совпаѓа со множеството решенија на конгруентната равенка $x - y \equiv 2 \pmod{6}$.

$$\text{г) } \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{6} \\ y \equiv 2 \pmod{6} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{6} \\ y \equiv 2 \pmod{6} \end{cases}$$

Пример 6 Докажи дека системот $\begin{cases} 5x + y \equiv 3 \pmod{33} \\ x + 2y \equiv 1 \pmod{21} \end{cases}$ нема решенис.

Решение. НЗС(33,21) = 231. Од првата конгруенција имаме

$$y \equiv 3 - 5x + 33i \pmod{231}, i = 0, 1, 2, \dots, 6$$

Заменуваме во втората конгруенција и добиваме

$$9x \equiv 5 + 66i \pmod{21}$$

што не е можно бидејќи $5 + 66i \not\equiv 0 \pmod{3}$, за секој $i \in \mathbb{N}$.

Пример 7 Најди критериум за решливост на системот

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \equiv c_1 \pmod{m_1} \\ a_2x + b_2y \equiv c_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

Решение. Нека $\text{НЗС}(m_1, m_2) = m$ и $m = m_1q_1 = m_2q_2$. Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} a_1q_1x + b_1q_1y \equiv c_1q_1 \pmod{m} \\ a_2q_2x + b_2q_2y \equiv c_2q_2 \pmod{m} \end{cases}$$

од кој следува

$$\begin{cases} (a_1b_2 - b_1a_2)x \equiv c_1b_2 - b_1c_2 \pmod{d} \\ (a_1b_2 - b_1a_2)y \equiv c_2a_1 - a_2c_1 \pmod{d} \end{cases}$$

каде што $d = \text{НЗД}(m_1, m_2)$. Нека $\text{НЗД}(a_1b_2 - b_1a_2, d) = \delta$. Тогаш бараниот критериум е $c_1b_2 - b_1c_2 \equiv c_2a_1 - a_2c_1 \equiv 0 \pmod{\delta}$.



Задачи за самостојна работа

1. Реша ги равенките:

а) $5 \cdot x \equiv 1 \pmod{7}$

б) $14 \cdot x \equiv 15 \pmod{45}$

2. Реша ги равенките:

а) $6 \cdot x \equiv 10 \pmod{14}$

б) $9 \cdot x \equiv 21 \pmod{12}$

3. Одреди ги заедничките решенија на равенките:

а) $x \equiv 2 \pmod{5}$

$x \equiv 5 \pmod{2}$

б) $x \equiv 7 \pmod{9}$

$x \equiv 13 \pmod{23}$

$x \equiv 1 \pmod{2}$

2.8. Некои Диофантови равенки. Питагорини тројки

Покрај линеарните Диофантови равенки многу често се сретнуваат и нелинеарни Диофантови равенки, како на пример: $x^2 + y^2 = z^2$, $x^n + y^n = z^n$, $x^2 - dy^2 = 1$.

Решенијата на равенката $x^2 + y^2 = z^2$ ги нарекуваме Питагорини тројки, по аналогија на Питагорината теорема за правоаголен триаголник. Прашањето дали

равенката $x^n + y^n = z^n$, за $n > 2$ има нетривијално целобројно решение $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, познато као голема теорема на Ферма, со векови окупираше голем број математичари. Пред околу 400 години, Ферма напишал дека има доказ дека такви решенија не постојат, но немал место на книгата да го напише доказот. За одговарање на ова прашање е развиен голем математички апарат, кој се користи и за други примени, а пред десетина години, Теоремата на Ферма (равенката $x^n + y^n = z^n$, за $n > 2$ нема нетривијално целобројно решение $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, е докажана од Вилес.

Равенките $x^2 - dy^2 = 1$ и $x^2 - dy^2 = -1$ се познати како Равенки на Ферма-Пел.

При решавање на вакви равенки често се користат конгруенции. Ќе споменеме неколку теореми без доказ.

Теорема 1.

Нека p е прост број и нека $d|(p-1)$. Тогаш равенката $x^d \equiv 1 \pmod{p}$ има точно d решенија.

Теорема 2.

Нека p е прост број. Тогаш равенката $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ има решение кога $p=2$ или кога $p \equiv 1 \pmod{4}$, но нема решение кога $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Теорема 3.

Нека d е делив со прост број p , и нека $p \equiv 3 \pmod{4}$, или нека d е делив со 4. Тогаш равенката на Ферма-Пел $x^2 - dy^2 = -1$ нема целобројни решенија.

Да ја разгледаме равенката $x^2 + y^2 = z^2$. Ако (x, y, z) е решение такво што x, y и z немаат заеднички делител, тогаш таквото решение (x, y, z) го нарекуваме примитивно решение. Во спротивно, ако $d = \text{НЗД}(x, y, z) > 1$, тогаш равенката можеме да ја скратиме со d^2 . Да забележиме дека е доволно да ги определиме само примитивните решенија (x, y, z) , а останатите се од облик (kx, ky, kz) , $k \in \mathbb{N}$, кога равенката ја решаваме во $\mathbb{N}$.

Теорема 4.

Постојат бесконечно многу решенија на равенката

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

за кои $\text{НЗД}(x, y, z) = 1$ и $x, y, z \in \mathbb{N}$. Тие се дадени со

$$x = u^2 - v^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2 \quad (2)$$

каде што $u, v \in \mathbb{N}$, $\text{НЗД}(u, v) = 1$, $u > v$, u и v се со различна парност.

Доказ. Нека x, y, z е решение на (1) и нека $\text{НЗД}(x, y, z) = 1$. Ако x и y се парни тогаш и z е парен, што не е можно заради $\text{НЗД}(x, y, z) = 1$. Без губење на општост, нека x е непарен и нека y е парен број. Тогаш, следува дека z е непарен, односно $2|(z+x)$ и $2|(z-x)$. Според тоа,

$$\frac{z+x}{2} \cdot \frac{z-x}{2} = \left(\frac{y}{2}\right)^2 \quad (3)$$

каде што $\frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2}$ и $\frac{y}{2}$ се цели броеви. Забележуваме дека $\text{НЗД}(x, z) = 1$, бидејќи ако x и z имаат заеднички прост делител, тој е делител и на y , што противречи на претпоставката дека $\text{НЗД}(x, y, z) = 1$. Нека $d = \text{НЗД}\left(\frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2}\right)$.

Но, тоа значи дека $d \mid \left(\frac{z+x}{2} + \frac{z-x}{2} \right)$, односно $d \mid z$ и $d \mid \left(\frac{z+x}{2} - \frac{z-x}{2} \right)$, па значи $d \mid x$.

Затоа $d \mid \text{НЗД}(x, z)$, што значи дека $d = 1$. Според тоа, од (3) следува дека постојат u и v такви што $\frac{z+x}{2} = u^2$, $\frac{z-x}{2} = v^2$.

Така, $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$. Ако $d \mid u$ и $d \mid v$, тогаш $d^2 \mid x$, $d^2 \mid y$ и $d^2 \mid z$, т. е. $d^2 = 1$. Значи $\text{НЗД}(u, v) = 1$. Притоа јасно е дека x е непарен, y е парен и z е непарен. На крајот од $x > 0$ добиваме $u > v$.

Обратно, нека $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$, каде што $u, v \in \mathbb{N}$, $\text{НЗД}(u, v) = 1$, $u > v$, и u, v се со различна парност. Тогаш, $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$ т. е. $x^2 + y^2 = z^2$.

Од $u > v$ следува дека $x > 0, y > 0, z > 0$. Нека p е прост број таков што $p \mid d_1 = \text{НЗД}(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$. Но, тоа значи дека

$$p \mid (u^2 + v^2 + 2uv) \text{ и } p \mid (u^2 + v^2 - 2uv),$$

односно $p \mid (u+v)^2$ и $p \mid (u-v)^2$. Бидејќи p е прост број, следува дека $p \mid (u+v)$ и $p \mid (u-v)$. Но, тоа значи дека $p \mid 2u$ и $p \mid 2v$, односно $p \mid \text{НЗД}(2u, 2v) = 2 \cdot \text{НЗД}(u, v) = 2$. Затоа $p = 2$, што противречи на претпоставката $2 \mid (u^2 + v^2)$, и u и v се со различна парност. Според тоа, $d_1 = 1$, односно $\text{НЗД}(x, y, z) = 1$.

Пример 1 Ако радиусот на еден круг е непарен прост број, тогаш околу него можат да се опишат точно два нескладни примитивни Питагорини триаголници. Докажи!

Решение. Ако $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ е примитивна Питагорова тројка, тогаш полупречникот на впишаниот круг на соодветниот триаголник е $r = \frac{1}{2}(a + b - c) = n(m - n)$. Ако r е непарен прост број p , тогаш мора да биде

$$(1) \quad n = 1, m = p + 1, a = p(p + 2), b = 2(p + 1), c = p^2 + 2p + 1$$

или

$$(2) \quad n = p, m = p + 1, a = 2p + 1, b = 2p(p + 1), c = 2p^2 + 2p + 2.$$



Задачи за самостојна работа

1. Најди ги сите решенија на равенката $x^2 + 2y^2 = w^2$, за кои: $x > 0, y > 0, w > 0$.
2. Најди ги сите решенија на равенката $x^2 + 3y^2 = w^2$, за кои: $x > 0, y > 0, w > 0$.
3. Најди ги сите решенија на равенката $x^2 + y^2 = 4w^2$, за кои: $x > 0, y > 0, w > 0$.
4. Докажи дека Диофантовата равенка $x^2 + y^2 = w^4$ има бесконечно многу решенија.

2.9. Метод на спуштање кај некои Диофантови равенки

При решавањето на нелинеарни Диофантови равенки често пати го користиме следниот метод на Ферма, познат како метод на спуштање. Ако претпоставиме дека равенката има решение во множеството на природни броеви, тогаш докажуваме дека истата има „помало“ решение во множеството на природни броеви. На тој начин конструираме строго монотono опаѓачка бесконечна низа од природни броеви кои се решенија на дадената равенка, што противречи на фактот дека во $\mathbb{N}$ не постои строго монотono опаѓачка бесконечна низа. Последната противречност значи дека разгледуваната равенка нема решение.

Теорема 1.

Равенката

$$x^4 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

нема решение во множеството цели броеви, за кое $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Доказ. Ако $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ е решение на (1), тогаш и $x = |x_0|, y = |y_0|, z = |z_0|$ е решение на равенката (1). Затоа доволно е тврдењето да го докажеме за природните броеви. Исто така, можеме да претпоставиме дека $\text{НЗД}(x, y) = 1$. Имено, ако $\text{НЗД}(x, y) = d$, тогаш $x = dx_1, y = dy_1$, т. е.

$$x_1^4 + y_1^4 = \left(\frac{z}{d^2}\right)^2$$

што значи дека $z_1 = z/d^2$ е природен број. Но, тогаш

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^2, \text{ НЗД}(x_1, y_1) = 1, x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{N}.$$

Според тоа, повторно можеме да разгледуваме само примитивни решенија на равенката (1). Нека, (x_1, y_1, z_1) е такво решение. Ќе докажеме дека постои решение (x_2, y_2, z_2) такво што $\text{НЗД}(x_2, y_2) = 1, x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{N}$ и $0 < z_2 < z_1$.

Од $(x_1^2)^2 + (y_1^2)^2 = z_1^2$ следува дека x_1^2, y_1^2, z_1 е примитивна Питагорина тројка. Според теорема 1 од 5. 8. постојат $u, v \in \mathbb{N}, u > v$ такви што

$$x_1^2 = u^2 - v^2, y_1^2 = 2uv, z_1 = u^2 + v^2. \quad (2)$$

Од (2) следува дека $x_1^2 + v^2 = u^2$, каде што $(x_1, v, u) = 1$ е примитивна Питагорина тројка. Можеме да претпоставиме дека x_1 е непарен и затоа v е парен. Така u е непарен, па постојат $a, b \in \mathbb{N}$ такви што

$$a^2 + b^2 = u, 2ab = v \text{ и } \text{НЗД}(a, b) = 1. \quad (3)$$

Бидејќи u е непарен, v е парен и $\text{НЗД}(u, v) = 1$, добиваме $\text{НЗД}(u, 2v) = 1$. Според тоа, $y_1^2 = u(2v)$, од што следува дека постојат $z_2, c \in \mathbb{N}$ такви што $u = z_2^2, 2v = c^2$.

Бидејќи c е парен број, имаме $c = 2d$, односно $v = 2d^2$. Така, $ab = v/2 = d^2$.

Но $\text{НЗД}(a, b) = 1$, па според тоа следува дека постојат x_2 и y_2 такви што

$$a = x_2^2, b = y_2^2 \text{ и } \text{НЗД}(x_2, y_2) = 1.$$

Со замена за a, b и u во (3) наоѓаме $x_2^4 + y_2^4 = z_2^2$.

На тој начин докажуваме дека постојат $x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{N}$, $\text{НЗД}(x_2, y_2) = 1$ и $0 < z_2 \leq z_2^4 = u^2 < u^2 + v^2 = z_1$, такви што подредената тројка (x_2, y_2, z_2) е решение на равенката (1).

Продолжувајќи ја постапката наоѓаме ново решение (x_3, y_3, z_3) на (1) во множеството на природни броеви, за кое $\text{НЗД}(x_3, y_3) = 1$ и $0 < z_3 < z_2$ итн. Според тоа ако (1) има решение (x_1, y_1, z_1) во множеството на природни броеви, тогаш таа има бесконечно многу решенија (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots$ во природните броеви, за кои важи

$$z_1 > z_2 > z_3 > z_4 > z_5 > \dots,$$

што не е можно. Последната противречност ја докажува точноста на теоремата, односно дека не постојат решенија на (1), за кои $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$.

Пример 1 Да ја разгледаме равенката

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \quad (4)$$

Нека (x, y, z, w) е решение на равенката. Без губење на општост, можеме да претпоставиме дека $\text{НЗД}(x, y, z, w) = 1$ и дека $x, y, z, w \in \mathbb{N}$. Ако $w = 0$, тогаш $x = y = z = 0$. Ако еден од x, y, z е нула, тогаш останатите формираат Питагорина тројка.

Нека претпоставиме дека

$$w = x + y \quad (5)$$

Тогаш (4) го добива обликот $z^2 = 2xy$ кој е доста поедноставен. Според тоа, z е парен и имаме $z = 2u$ и затоа $2u^2 = xy$. Но, ова значи дека еден од броевите x и y е парен. Земаме x да е парен, односно $x = 2v$ и добиваме $u^2 = vy$. Според теорема 4 од 2.8, постојат $a, b \in \mathbb{N}$ такви што

$$v = a^2, y = b^2. \quad (6)$$

Од (6) наоѓаме решенија на равенката (4)

$$x = 2a^2, y = b^2, z = 2ab, w = 2a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{N}.$$

Значи, постојат бесконечно многу решенија на равенката (4) за кои $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ и $w \neq 0$. Што се однесува до определувањето на решенијата на равенката (4), може да се определи и друга класа на решенија за која $w = x + y$. Имено, да претпоставиме дека две променливи од x, y, z се првиот пар на Питагорина тројка. Тогаш

$$t^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = w^2$$

и така x, y, t и t, z, w се Питагорини тројки. Според теорема 4 од 2.8, можеме да претпоставиме дека x, y, z и t, z, w се примитивни тројки. Така, имаме

$$x^2 + y^2 = t^2, t^2 + z^2 = w^2, \text{НЗД}(x, y, t) = \text{НЗД}(t, z, w) = 1, x, y, z, t, w \in \mathbb{N} \quad (7)$$

Бидејќи x, y, t е примитивна Питагорина тројка, t е непарен и без губење на општоста можеме да претпоставиме дека x е непарен, а y е парен број. Но, како t, z, w е примитивна Питагорина тројка и t е непарен број, според теорема 4 од 2.8, постојат $r, s, u, v \in \mathbb{N}$ такви што $\text{НЗД}(r, s) = 1$, $\text{НЗД}(u, v) = 1$, $r > s$, $u > v$ при што r и s се со различна парност и u и v се со различна парност и уште:

$$x = r^2 - s^2, y = 2rs, t = r^2 + s^2, t = u^2 - v^2, z = 2uv, w = u^2 + v^2.$$

Притоа $t = r^2 + s^2 = u^2 - v^2$, односно $r^2 + s^2 + v^2 = u^2$, каде што $r, s, u, v \in \mathbb{N}$. Исто така, од $\text{НЗД}(r, s) = 1$ следува $\text{НЗД}(r, s, v, u) = 1$. Освен тоа, $u \leq u^2 < u^2 + v^2 = w$.

Така од секое решение на (4), кое е и решение на (7) имаме решение на (4) со помала последна променлива. Притоа да забележиме дека r и s не мора да се членови на Питагорината тројка (r, s, α) и v и u не мора да се два члена на Питагорината тројка (α, v, u) . Во спротивно добиваме дека равенката (4) нема решенија (методот на Ферма), а ние веќе докажавме дека (4) има решенија и тоа бесконечно многу.

Последната дискусија со Питагорините тројки овозможува, исто така, да се определат бесконечно многу решенија на равенката (4). Имено, едно решение на (4) е $u = 3, v = 2, r = 2, s = 1$, т. е. $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$. Сега добиваме $x = 3, y = 4, t = 5, z = 12$ и $w = 13$, да е решение на (7). Земаме $u = 13$. Бидејќи v е парен број и $(u, v) = 1$ имаме $v = 12$ и како $r > s$ имаме $r = 4$ и $s = 3$. Но, тогаш добиваме дека $x = 7, y = 24, t = 25, z = 312, w = 313$ е решение на (7). Земаме $u = 313$. Бидејќи v е парен број, имаме $v = 24$ и како $r > s$ имаме $r = 312$ и $s = 7$. Но, тогаш добиваме

$$x = 312^2 - 7^2, y = 2 \cdot 312 \cdot 7, t = 312^2 + 7^2, z = 2 \cdot 312 \cdot 24, w = 313^2 + 24^2$$

што претставува ново решение на (7), т. е. на (4). Значи (4) и (7) имаат бесконечно многу решенија. Според тоа, важи следната:

Теорема 2 Равенката (4) и системот равенки (7) имаат бесконечно многу решенија, за кои сите променливи се различни од нула.

Пример 2 Докажи дека равенката $x^2 + y^2 = 6z^2$ во множеството $\mathbb{Z}$ нема решение различно од $(0, 0, 0)$.

Решение. Нека (a, b, c) е решение на равенката, каде што a, b, c се заемно прости броеви. Десната страна на равенката е делива со 3, па затоа и левата страна е делива со 3. Но, тоа значи дека $3|a$ и $3|b$. Имено, ако $a = 3k \pm 1$ и $b = 3k \pm 1$, тогаш $a^2 + b^2 = 3m - 1$, што е противречност. Затоа $9|a^2$ и $9|b^2$ од што следува дека $9|6c^2$, т. е. $3|2c^2$. Но, $\text{НЗД}(2, 3) = 1$ и затоа $3|c$, што противречи на претпоставката дека a, b и c се заемно прости броеви.

Пример 3 Во множеството на цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

Решение. Очигледно едно решение на равенката е $(0, 0, 0)$. Затоа да претпоставиме дека (x, y, z) е решение на равенката и дека сите три броеви x, y, z се различни од нула. Тогаш секој од броевите можеме да го запишеме во обликот $2^k t$, каде што t е непарен број, т. е. $x = 2^p x_1, y = 2^q y_1, z = 2^s z_1$, за непарни x_1, y_1, z_1 . Од симетричноста на равенката следува дека не се губи од општоста ако претпоставиме $p \leq q \leq s$. Тогаш равенката може да се скрати со 2^{2p} и добиваме

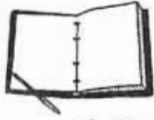
$$x_1^2 + (2^{q-p} y_1)^2 + (2^{s-p} z_1)^2 = 2^{q+s-p+1} x_1 y_1 z_1.$$

Ако $q > p$, тогаш левата страна е непарна, а десната е парна, што е противречност. Значи мора да е $q = p$. Но, тогаш равенката го добива обликот

$$x_1^2 + y_1^2 + (2^{s-p} z_1)^2 = 2^{s+1} x_1 y_1 z_1.$$

Ако $s = p$, тогаш левата страна е непарна, а десната е парна, што е противречност.

Значи мора да е $s > p$. Но, тогаш $x_1^2 + y_1^2$ е делив со 2, а $(2^{s-p} z_1)^2$ и $2^{s+1} x_1 y_1 z_1$ се деливи со 4, па добиваме противречност. Значи, дадената равенка во множеството цели броеви има единствено решение $(0, 0, 0)$.



Задачи за самостојна работа

1. Реши ја Диофантовата равенка $x^4 + 4y^4 = w^2$.
2. Докажи дека не постои правоаголен триаголник чии страни се природни броеви, а чија плоштина е квадрат од природен број.
3. Докажи дека Диофантовата равенка $x^2 - 3y^2 = 6$ има бесконечно многу решенија.
4. Докажи дека Диофантовата равенка $3x^5 + 5y^5 = z^5$ нема нетривијално решение.
5. Докажи дека Диофантовата равенка $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ има бесконечно многу решенија.
6. Докажи дека ако (x, y, z) е решение на Диофантовата равенка $x^3 + y^3 = z^3$ тогаш $(x+y-z)^3 = 3(x+y)(x-z)(y-z)$, а потоа докажи дека барем еден од броевите x, y, z е делив со 3. (Ова е еден случај од големата теорема на Ферма за $n=3$.)
7. Докажи дека ако (x, y, z) е решение на Диофантовата равенка $x^5 + y^5 = z^5$ тогаш $2(x+y-z)^5 = 5(x+y)(x-z)(y-z)[(x+y-z)^2 + x^2 + y^2 + z^2]$, а потоа докажи дека барем еден од броевите x, y, z е делив со 5. (Ова е еден случај од големата теорема на Ферма за $n=5$.)

2.10. Задачи за вежбање

1. Најди ги сите $n \in \mathbb{N}$ за кои: $\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{n^2 - 1} \rfloor = 70$.
2. Најди ги сите реални броеви x , за кои: $x^3 - \lfloor x \rfloor = 3$.
3. Нека $n, m \in \mathbb{N}$. Докажи дека $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ е природен број.
4. Најди ги сите $n, m \in \mathbb{N}$ за кои $\text{НЗД}(n, m) = 18$, $d(m) = 21$, $d(n) = 10$ и тие немаат заеднички прости делители различни од 2 и 3.
5. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \dots + \sigma(n) = 1 \cdot \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + n \cdot \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$
6. Најди ги сите $n \in \mathbb{N}$ од облик $2^a 3^c$ за кои $\sigma(n) = 403$.
7. Најди го $\text{НЗД}(a, 26)$, ако $a^{10} \equiv 10 \pmod{26}$.

8. Докажи дека не постојат совршени броеви од облик p^n , за p прост број.
9. Докажи дека не постојат совршени броеви од облик $p^a q^c$, за p, q прости броеви.
10. Докажи дека за секој $k \in \mathbb{N}$, $k^3 \equiv k \pmod{3}$.
11. Докажи дека за секој $k \in \mathbb{N}$, кој не е делив со 5, $k^4 \equiv 1 \pmod{5}$.
12. Најди ги сите можни вредности на збир од два квадрати по модул 4. Потоа, докажи дека 5 436 676 923 не е збир од два квадрати.
13. Нека $n, m \in \mathbb{N}$, нека $m > n$ и нека се дадени m природни броеви. Докажи дека меѓу тие m природни броеви мора да има два кои се конгруентни по модул n .
14. Докажи дека за бесконечно многу природни броеви n , $43 | (n^2 + n + 41)$.
15. Докажи дека ако $n^2 + 2$ и $n^2 - 2$ се прости, тогаш $3 | n$.
16. Најди го остатокот при делењето на $(23^{32} + 200^3)^6$ со 13.
17. Нека p, q се различни непарни прости броеви и нека $\text{НЗД}(a, pq) = 1$. Докажи дека $a^{\varphi(pq)/2} \equiv 1 \pmod{pq}$.
18. Докажи дека ако $n > 2$, тогаш $2 | \varphi(n)$.
19. Докажи дека за секој $k \in \mathbb{N}$, броевите: $4 \cdot 14^k + 1$ и $521 \cdot 12^k + 1$ се сложени.
20. Нека p е прост број и нека $\text{НЗД}(a, p) = 1$. Докажи дека равенката $x^2 \equiv a \pmod{p}$ има решение ако $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$, а нема решение ако $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$.
21. Реши ги равенките: а) $3 \cdot x \equiv 2 \pmod{78}$; б) $14 \cdot x \equiv 35 \pmod{87}$.
22. Најди ги заедничките решенија на:
а) $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{4}$; б) $2x \equiv 3 \pmod{5}$, $4x \equiv 3 \pmod{7}$.
23. Реши го системот: $2x + 7y \equiv 8 \pmod{13}$, $5x + 10y \equiv 7 \pmod{13}$.
24. Најди ги сите позитивни решенија на равенката:
а) $x^2 + 12 = y^4$; б) $x^3 + y^3 = 20$; в) $x^3 - y^3 = 19$.
25. Најди ги сите позитивни решенија на равенката:
а) $x^2 + 7y^2 = 3$; б) $x^2 - 11y^2 = 3$; в) $x^2 - 3y^2 = 2$.
26. Најди ги сите позитивни решенија на равенката:
а) $x^2 + 3y^2 = 2z^2$; б) $x^4 + y^4 = 13z^4$; в) $x^2 - 7y^2 = 3z^2$.
27. Најди ги сите позитивни решенија на равенката $11x^2 + 10x - y^2 + 2 = 0$.
28. Докажи дека равенката $x^4 + 4y^4 = z^2$ нема ненулта решение.
29. Докажи дека не постои природен број n , за кој $n^2 + 2n + 3 \equiv 0 \pmod{5}$.
30. Реши ги конгруентните равенки:
а) $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$; б) $x^2 \equiv 4 \pmod{15}$;
в) $x^2 + x + 4 \equiv 0 \pmod{8}$; г) $x^3 + 2x^2 + 5x + 6 \equiv 0 \pmod{11}$.

3. НЕРАВЕНСТВА

3.1. Поим и видови неравенства

Да преминеме ссга на разгледување на нееднаквоста на полиномите од една променлива, односно на неравенства меѓу вредностите на полиномите што тие ги добиваат за исти вредности на променливата.

Неравенствата имаат смисла само во подредените бројни множества, на пример во множеството на рационалните или реалните броеви, во кои се дефинирани релациите: „е поголем од“, „е помал од“, „е еднаков со“. Во множеството на комплексните броеви, бидејќи наведените релации не се дефинирани, неравенствата немаат смисла и не се разгледуваат.

Дефиниција 1.

Два броја (константи или променливи) или два изрази (бројни или алгебарски) сврзани со знакот „<“ (помал од) или „>“ (поголем од) велиме дека образуваат неравенство.

Пример 1 Примери на неравенства се следниве симболички записи:

$$7 > 3, 4 \cdot 5 < 5^2, 1 < -5, a < b, x < x + 1, 2x - 1 > x + 3 \text{ итн.}$$

Кај секое неравенство разликуваме лева и десна страна и знак на неравенство (< или >). За две неравенства со ист знак на неравенство (двете со знак < или двете со знак >) велиме дека имаат еднаква смисла или дека се **еднакво насочени**, а за две неравенства со спротивни знаци на неравенство (едното со знак <, другото со знак >, или обратно) велиме дека имаат спротивна смисла или дека се **спротивно насочени**.

Покрај горните два знака за неравенство, понекогаш ги користиме и следниве два алтернативни знака на неравенство: „ $\geq$ “ (поголем или еднаков на) и „ $\leq$ “ (помал или еднаков) кои, исто така, се спротивни еден на друг.

Ако двете страни на неравенството се броеви или бројни (нумерички) изрази, велиме дека тоа е **бројно или нумеричко неравенство**. Ако, пак, двете или барем едната од страните на неравенството е некој израз што содржи променливи, тогаш тоа се нарекува **функционално неравенство**. Бројните неравенства, всушност, се **искази**, а функционалните неравенства се **предикати (исказни функции)**. Значи, секое бројно неравенство е или вистинит исказ, т. е. вистинито; или неистинит исказ- неистинито.

Пример 2 На пример, бројните неравенства $7 > 3$ и $4 \cdot 5 < 5^2$ се вистинити бројни неравенства, додека $1 < -5$ е неистинито бројно неравенство.

Секое, пак, функционално неравенство, кога променливите во него ќе се заменат со кои било допуштени вредности за нив, станува бројно неравенство, т. е. преминува во вистинит или неистинит исказ.

Пример 3 На пример, функционалното неравенство, $2x - 1 > x + 3$ за $x = 1$ преминува во неистинито бројно неравенство $1 > 4$, а за $x = 5$ тоа преминува во вистинито бројно неравенство $9 > 8$.

Во зависност од бројот на променливите во функционалното неравенство, тоа може да биде со една, две или повеќе променливи. Во неравенствата, променливите уште

се викаат и **непознати**, но термините променливи и аргументи сметаме дека се посоодветни.

Па пример, функционалното неравенство

$$f(x) < g(x) \quad (1)$$

е со една променлива x , а неравенството

$$A(x, y, \dots, v) < B(x, y, \dots, v) \quad (2)$$

е неравенство со повеќе променливи $x, y, \dots, v$.

Ако за некоја допуштена вредност a на променливата x , $x = a$ неравенството (1) преминува во вистинито бројно неравенство, т. е. вредноста на изразот f е помала од вредноста на изразот g :

$$f(a) < g(a)$$

тогаш велíme дека вредноста на променливата $x = a$ е **решение** на неравенството (1). Велíme уште и дека $x = a$ го задоволува неравенството (1). Слично на тоа, ако за некој систем допуштени вредности на променливите: $x = a, y = b, \dots, v = c$, односно за некоја подредена n -торка броеви $(a, b, \dots, c)$ неравенството (2) преминува во вистинито бројно неравенство $A(a, b, \dots, c) < B(a, b, \dots, c)$, тогаш системот допуштени вредности, односно подредената n -торка броеви $(a, b, \dots, c)$ се вика **решение на неравенството** (2) со променливи $x, y, \dots, v$. Велíme уште и дека подредената n -торка броеви $(a, b, \dots, c)$ го задоволува неравенството (2).

Сите решенија на неравенството (1), односно (2) формираат некое множество M кое се нарескува **множество решенија** на неравенството (1), односно (2). Множеството, пак, од сите допуштени вредности на променливата x во неравенството (1), односно множеството од сите системи на допуштени вредности на променливите $x, y, \dots, v$ во неравенството (2) се вика **дефинициона област** или **домен** на функционалното неравенство (1), односно (2) и се означува со D .

Дефиниционата област D на дадено функционално неравенство обично се задава со самото неравенство, но ако не е зададена неа ја определуваме како пресек од дефиниционите области D_1 и D_2 на левата и десната страна на неравенството.

Процесот на одредување на множеството решенија M на дадено функционално неравенство се вика негово **решавање**.

Во зависност од односот на множеството решенија M на функционалното неравенство и неговата дефинициона област D , функционалните неравенства се поделени на две класи. Во едната класа спаѓаат сите функционални неравенства кај кои множеството решенија M се совпаѓа со нивната дефинициона област D , т. е. $M = D$; а во другата класа- сите функционални неравенства кај кои е $M \neq D$, поточно $M \subset D$.

Кај првата класа неравенства барањето за нивно решавање станува беспредметно, ако се тврди дека тие се идентично задоволени на целата нивна дефинициона област. Кај нив се поставува задача да се докаже тоа што се тврди. Кај втората класа функционални неравенства се поставува задача, пак, да се одредат сите вредности на променливата (или сите системи вредности на променливите, ако неравенството е со повеќе променливи) за кои тоа е задоволено во дефиниционата област. Со други зборови, тоа е задача на нивно решавање, односно одредување на нивното множество решенија.

Функционалните неравенства од прва класа се викаат **идентични неравенства**, или само **неравенства**, а тие од втора класа се викаат **неравенки**. Суштинска разлика меѓу нив е што неравенствата се докажуваат, а неравенките се решаваат.



Задачи за самостојна работа

- Запиши 6 неравенства.
- Кои од следните неравенства се бројни:
 - $3 \cdot 2^2 > 4$,
 - $x + 2 > 2x - 1$,
 - $7 > 9$,
 - $2 \cdot (4 + 7) > 3^2$,
 - $2x > 1$?
- Утврди кои од следните реченици се искази:
 - $x + 3 > 8$,
 - $x + 3 > 0$ за $x = 0$,
 - $3x + 1 > 0$ за $x = 1$,
 - Градот x е поголем од градот Скопје.
- Одреди кои од следните реченици се предикати во множеството на природни броеви и со колку променливи:
 - $3x > 9$,
 - $2x - y < 1$,
 - $2x - y \geq z$,
 - „ x е број помал од 17”.
- Најди го множеството решенија на предикатите:
 - $x < 5, x \in \mathbb{N}$,
 - $3 < x \leq 6, x \in \mathbb{N}$,
 - $x + y \leq 5, x, y \in \mathbb{N}$.

3.2. Апсолутна вредност и својства на апсолутна вредност на реален број

Под **апсолутна вредност** или **модул** на реален број a , што се означува $|a|$, се подразбира бројот:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geq 0 \\ 0, & \text{ако } a = 0 \\ -a, & \text{ако } a < 0 \end{cases}$$

Геометриски бројот $|a|$ го означува растојанието на некоја точка од бројната права до точката 0, без разлика дали се наоѓа лево или десно од точката $O(0)$ на бројната права (црт. 1). Од дефиницијата за апсолутна вредност на реален број имаме:

$$|a - b| = |b - a|$$

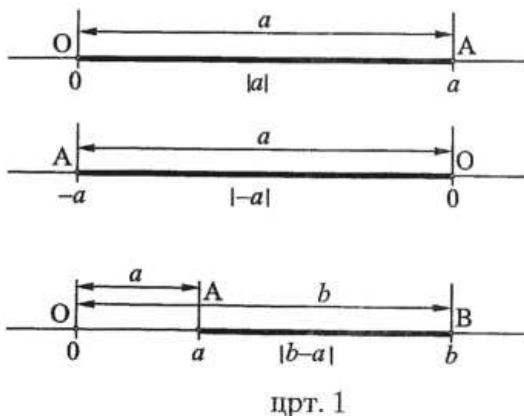
а тоа го означува растојанието меѓу точките $A(a)$ и $B(b)$ на бројната права (црт. 1).

Често пати го среќаваме неравенството

$$|x| < a, \text{ каде што } a > 0.$$

Ова неравенство го означува множеството од сите броеви x чија оддалеченост од точката $O(0)$ на бројната права е помала од a , т.е. множеството од броеви x кои го задоволуваат неравенството:

$$-a < x < +a$$



и за нив велиме дека се наоѓаат во внатрешноста на интервалот со должина $2a$, симетрично во однос на 0.

Неравенството, пак, $|x| \leq a$, при $a > 0$, кое го читаме: апсолутно x е помал или еднаков на a или x не е поголем од a , ги означува сите вредности x кои го задоволуваат неравенството

$$-a \leq x \leq a.$$

Значи, точката што го претставува бројот x на бројната права може да се совпадне и со еден од краевите на должините кои ги претставуваат броевите $-a$ и $+a$ на бројната права.

Неравенството $|x| > a$, каде што $a > 0$, го означува множеството од сите броеви x чија оддалеченост од точката $O(0)$ на бројната права е поголема од a , т.е. множеството од броеви x кои задоволуваат барем едно од неравенствата:

$$x < -a \text{ или } x > a,$$

и за нив велиме дека се наоѓаат надвор од интервалот со должина $2a$, симетрично во однос на 0.

Неравенството, пак, $|x| \geq a$, при $a > 0$, кое го читаме: апсолутно x е поголем или еднаков на a или x не е помал од a , ги означува сите вредности x кои задоволуваат барем едно од неравенствата

$$x \leq -a \text{ или } x \geq a,$$

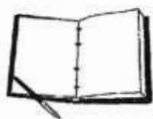
Значи, точката што го претставува бројот x на бројната права може да се совпадне и со еден од краевите на должините кои ги претставуваат броевите $-a$ и $+a$ на бројната права.

Неравенството $|x| > a$, каде што $a < 0$, го задоволува секој реален број, додека неравенството $|x| < a$, каде што $a < 0$, не е исполнето за ниеден реален број.

За апсолутна вредност на реален број важат равенствата:

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, за секои $a, b \in \mathbb{R}$,

2. $|a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot |a_3| \cdot \dots \cdot |a_n|$, за секои $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.



Задачи за самостојна работа

1. Докажи ги својствата за апсолутна вредност на реален број.

Упатство. При докажувањето на својството 1 разгледај ги следниве случаи:

а) $a > 0, b > 0$; б) $a > 0, b < 0$; в) $a < 0, b > 0$; г) $a < 0, b < 0$.

При докажувањето на својството 2 користи го методот на математичка индукција.

2. Најди ја апсолутната вредност на следниве броеви:

а) 5; б) -9; в) 0; г) $\frac{1}{3}$; д) -0,45.

3. Со примена на својствата на апсолутна вредност на реален број пресметај:

а) $|(-3) \cdot 4|$; б) $|(x-3) \cdot (x+7)|$ за $x = -19$;

в) $|12 \cdot (-7) \cdot (-9) \cdot 17|$; г) $|x^2 - 225|$ за $x = 25$.

4. Реша ги неравенките:

а) $|x| < 1$;

б) $|x| \geq 1$;

в) $|x| > -2$;

г) $|x - 2| < 3$;

д) $|2x + 1| > 4$;

е) $|3 - 2x| < 5$.

5. Решете ги неравенките:

а) $\left| \frac{x}{x-1} \right| < 1$;

б) $\left| \frac{x+2}{x-3} \right| \leq 2$;

в) $\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| \leq 1$.

3.3. Неравенства со апсолутни вредности

При докажување на многу тврдења во математиката се користат неравенствата:

1. $|a + b| \leq |a| + |b|$,

2. $|a + b| \geq |a| - |b|$,

3. $|a - b| \geq |a| - |b|$,

каде што $a, b \in \mathbb{R}$.

Доказ: 1. За доказ на неравенството $|a + b| \leq |a| + |b|$ најнапред ќе покажеме дека:

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad (1)$$

Двојното неравенство (1) се состои од две неравенства

$$-|a| \leq a, \quad a \leq |a|. \quad (2)$$

За $a \geq 0$, првото неравенство преминува во неравенството $-a \leq a$ кое е вистинито неравенство, додека второто неравенство преминува во неравенството $a \leq a$ кое, исто така, е вистинито.

За $a \leq 0$, неравенството (1), односно (2), е исто така, вистинито.

Со собирање на неравенствата:

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|,$$

добиваме:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

односно:

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (3)$$

Во случај кога a и b се броеви со ист знак, неравенството (3) преминува во равенство.

2. За доказ на неравенството $|a + b| \geq ||a| - |b||$ поаѓаме од равенствата:

$$a = (a + b) - b, \quad b = (a + b) - a.$$

Со примена на неравенството (1) добиваме:

$$|a| = |(a + b) - b| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$$

$$|b| = |(a + b) - a| \leq |a + b| + |-a| = |a + b| + |a|$$

од каде што следува:

$$|a| - |b| \leq |a + b|, \quad -(|a| - |b|) \leq |a + b|$$

односно:

$$-|a + b| \leq |a| - |b|, \quad |a| - |b| \leq |a + b|$$

или

$$-|a + b| \leq |a| - |b| \leq |a + b|$$

Ова неравенство може да се запише во облик:

$$|a| - |b| \leq |a + b| \quad (4)$$

Неравенствата (1) и (2) може да ги запишеме во облик:

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

3. Поаѓајќи од равенството:

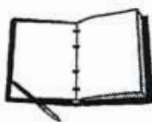
$$a = b + (a - b)$$

го добиваме неравенството:

$$|a| \leq |b| + |a - b|$$

односно неравенството

$$|a| - |b| \leq |a - b| \text{ т.е. } |a - b| \geq |a| - |b|.$$



Задачи за самостојна работа

1. Докажи дека $|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$, за секои $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

2. Докажи дека $|b - a| \geq |b| - |a|$, за секои $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Докажи го неравенството:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|, \text{ за секои } a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n.$$

3.4. Средни величини

Нека се дадени n позитивни реални броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$. Броевите

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \text{ и } \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

се нарекуваат соодветно и **квadratна, аритметичка, геометричка и хармониска средина** на броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Следните три задачи ја покажуваат врската која постои помеѓу овие средини:

Пример 1 Нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Докажи дека:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

и освен тоа равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, тогаш очигледно е дека важи равенство.

Да претпоставиме дека броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$ се менуваат, но притоа збирот $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ да биде константен. Да го побараме минимумот што притоа може да го

постигне квадратната средина, односно изразот $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$. Ќе докажеме дека овој израз, односно изразот $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ ќе го достигне својот минимум во случај кога $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ и со тоа задачата ќе биде решена.

Навистина, нека за броевите $b_1, b_2, \dots, b_n$ изразот $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ го достигнува својот минимум, но притоа $b_i \neq b_j$ за некои индекси $i \neq j$. Нека $b_1 \neq b_2$. Да ги разгледаме сепак броевите $b_1', b_2', \dots, b_n'$ дефинирани на следниот начин:

$$b_1' = b_2' = \frac{b_1 + b_2}{2} \text{ и } b_k' = b_k \text{ за } k \neq 1, 2.$$

Тогаш $b_1' + b_2' + \dots + b_n' = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, но $b_1'^2 + b_2'^2 + \dots + b_n'^2 < b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$, бидејќи

$$(b_1')^2 + (b_2')^2 < b_1^2 + b_2^2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 < b_1^2 + b_2^2 \Leftrightarrow 0 < (b_1 - b_2)^2 \Leftrightarrow b_1 \neq b_2.$$

Со тоа добиваме контрадикција, бидејќи изразот $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ не го достигнува својот минимум за броевите $b_1, b_2, \dots, b_n$. Значи, $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ го достигнува својот минимум за $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Пример 2 Нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Докажи дека:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

и освен тоа равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, тогаш очигледно е дека важи равенство.

Да претпоставиме дека броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$ се менуваат и притоа збирот $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ останува константен. Да го побараме максимумот што притоа може да го постигне геометриската средина, односно изразот $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$. Ќе докажеме дека овој израз, односно изразот $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ го достигнува својот максимум во случај кога $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ и со тоа задачата ќе биде решена.

Навистина нека $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ го достигнува својот максимум за броевите $b_1, b_2, \dots, b_n$, при што $b_i \neq b_j$ за некои индекси $i \neq j$. Без губење на општоста може да претпоставиме дека $b_1 \neq b_2$. Да ги разгледаме броевите $b_1', b_2', \dots, b_n'$ дефинирани со:

$$b_1' = b_2' = \frac{b_1 + b_2}{2} \text{ и } b_k' = b_k \text{ за } k \neq 1, 2.$$

Тогаш $b_1' + b_2' + \dots + b_n' = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, но $b_1' \cdot b_2' \cdot \dots \cdot b_n' > b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n$, бидејќи

$$b_1' \cdot b_2' > b_1 \cdot b_2 \Leftrightarrow \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 > b_1 \cdot b_2 \Leftrightarrow (b_1 - b_2)^2 > 0 \Leftrightarrow b_1 \neq b_2.$$

Со тоа добиваме контрадикција, што значи дека изразот $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ го достигнува својот максимум за $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Пример 3 Нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Докажи дека:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

и освен тоа равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Ако на броевите $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ го примениме неравенството кое ја одредува врската

меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right),$$

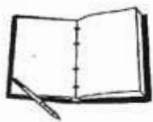
од каде што следува дека

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right),$$

односно

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Освен тоа равенството важи ако и само ако $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \dots = \frac{1}{a_n}$, т.е. $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.



Задачи за самостојна работа

1. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ и $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Докажи ги неравенствата:

a) $S_n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$;

б) $\left(a_1 + \frac{1}{a_1} \right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2} \right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)^2 \geq n \left(\frac{S_n}{n} + \frac{n}{S_n} \right)^2$.

2. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се позитивни реални броеви така што $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Докажи дека $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n$.

3.5. Некои поважни неравенства

Пример 1 (Кошијево неравенство) Нека $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ се произволно дадени реални броеви. За секоја реална вредност на променливата x изразот

$$(a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \dots + (a_n x + b_n)^2 \tag{1}$$

добива ненегативна вредност како збир на квадрати. По степенувањето и средувањето изразот (1) се сведува на квадратниот трином:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \tag{2}$$

Бидејќи коефициентот пред x^2 во (2) е позитивен (барем еден $a_i \neq 0$) дискриминантата на квадратниот трином (2) мора да е негативен број или нула:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \geq 0 \quad (3)$$

односно,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0 \quad (4)$$

Вообичаено неравенството (4), наречено Кошијево неравенство кратко се запишува во вид: $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$.

Пример 2 (Неравенство на Коши-Шварц-Буњаковски) Нека $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ за $i=1, 2, \dots, n$. Да се докаже неравенството:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \quad (5)$$

Освен тоа равенство важи ако и само ако: $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n}$

Од Кошиевото неравенство

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

непосредно следува

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

и оттука следува бараното неравенство. Освен тоа забележуваме дека равенство важи ако и само ако дискриминантата на квадратниот трином е еднаква на нула, а ова важи ако и само ако $a_i x + b_i = 0$, $i=1, 2, \dots, n$, т.е. $x = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2} = \dots = -\frac{b_n}{a_n}$ или, еквивалентно

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n}.$$

Неравенството (5), наречено неравенство на Коши-Шварц-Буњаковски кратко се запишува во вид: $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$.

Пример 3 (Бернулиево неравенство) Докажи дека $(1+h)^r \geq 1+rh$ ако $1+h > 0$ и $r \in \mathbb{Q}$.

Нека $r = \frac{p}{q}$, $p > q$ и $(p, q) = 1$, и нека

$$a_1 = a_2 = \dots = a_q = 1+rh, \text{ и } a_{q+1} = a_{q+2} = \dots = a_p = 1 \quad (6)$$

Тогаш од неравенството:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_q + a_{q+1} + a_{q+2} + \dots + a_p}{p} \geq \sqrt[p]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_q \cdot a_{q+1} \cdot \dots \cdot a_p} \quad (7)$$

чија десна страна според (7) е:

$$\sqrt[p]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_q \cdot a_{q+1} \cdot \dots \cdot a_p} = \sqrt[p]{(1+rh)^q} = (1+rh)^{\frac{q}{p}} \quad (8)$$

и чија лева страна, исто така, според (7) е:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_q + a_{q+1} + a_{q+2} + \dots + a_p}{p} &= \frac{q(1+rh) + (p-q)}{p} \\ &= \frac{q + qrh + p - q}{p} = \frac{ph + p}{p} = 1 + h \end{aligned} \quad (9)$$

следева дека ако (8) и (9) ги замениме во (7), добиваме:

$$(1+h) \geq (1+rh)^{\frac{1}{r}}, \text{ односно } (1+h)^r \geq (1+rh).$$

Неравенството $(1+h)^r \geq 1+rh$, за $1+h > 0$ и $r \in \mathbb{Q}$ се вика Бернулиево неравенство.

Пример 4 (Јенсеново неравенство) За функцијата $f(x)$ која е дефинирана на сегментот $[\alpha, \beta]$, велиме дека е **конвексна**, ако за секои $a, b \in [\alpha, \beta]$ важи:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\{f(a) + f(b)\}. \quad (10)$$

Нека $f(x)$ е конвексна функција на сегментот $[\alpha, \beta]$. Докажи дека за секој природен број $n > 1$ важи неравенството:

$$f\left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\right) \leq \frac{1}{n}(f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)), \quad a_i \in [\alpha, \beta], \quad i=1,2,\dots,n. \quad (11)$$

Притоа релациите (10) и (11) преминуваат во равенства ако и само ако се исполнети условите $a = b$, односно $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Најпрво ќе докажеме дека неравенството (11) е вистинито за секој $n = 2^k$ (k е природен број). Доказот ќе го изведеме со методот на математичка индукција.

Да претпоставиме дека неравенството (11) важи за некој природен број k , т.е. дека е вистинито неравенството

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n}, \quad n = 2^k \quad (12)$$

каде што $a_1, a_2, \dots, a_n$ не се сите меѓусебно еднакви.

За вредноста на конвексната функција $f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_v}{v}\right)$, $v = 2^{k+1} = 2^k \cdot 2 = 2n$,

$$\text{т.е. } f\left(\frac{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}}{n}}{2}\right), \text{ заради својството (10) и претпоставката}$$

искажана во релацијата (12) добиваме:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}}{n}}{2}\right) &< \frac{f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) + f\left(\frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}}{n}\right)}{2} < \\ &< \frac{(f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)) + (f(a_{n+1}) + f(a_{n+2}) + \dots + f(a_{2n}))}{2n} = \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{2n})}{2n}. \end{aligned}$$

Бидејќи неравенството (11) е точно за $n = 2^{k+1}$, ако е точно за $n = 2^k$ и тоа е точно уште и за $n = 2$, заклучуваме дека тоа е точно за секое $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Според тоа неравенството (10) е точно за бесконечно многу броеви $n \in \{2, 2^2, 2^3, \dots\}$.

Сега ќе докажеме дека од вистинитоста на неравенството (11) за n може да се извлече заклучок дека тоа е вистинито и за $n-1$.

Претпоставуваме дека неравенството (11) важи за некој природен број n и за секој $a_v \in [\alpha, \beta]$. Ако во (11) го замениме a_n со $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}$, се добива:

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}}{n}\right) < \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{n-1}) + f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}\right)}{n} \quad (13)$$

По средување изразот на левата страна на неравенството (13) го добива обликот

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}\right) < \frac{1}{n} \{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{n-1})\} + \frac{1}{n} f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}\right)$$

од каде што следува

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}\right) < \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{n-1})}{n-1}$$

Според тоа, ако релацијата (11) е точна за n , тогаш е точна и за $n-1$. Со ова го докажавме неравенството (11) под услови кои се однапред прецизирани. Овој метод на докажување се вика **метод на регресивна индукција**. Вистинитоста на исказот $P(n)$ по методот на регресивна индукција следува од:

- 1) $P(n)$ го повлекува $P(n-1)$;
- 2) $P(n)$ важи за бесконечно многу вредности n .

Пример 5 Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Најпрво ќе покажеме дека таа е конвексна за $x > 0$. За $k = 2$ имаме

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{4}, \quad x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2.$$

Бидејќи $2x_1x_2 < x_1^2 + x_2^2$, од последната релација добиваме:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \text{ т.е.} \\ \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}. \quad (14)$$

Тоа значи дека функцијата $f(x) = x^k$ е конвексна за $x > 0$ и за $k = 2$, односно $f(x) = x^2$ е конвексна за $x > 0$.

За да докажеме дека дадената функција $f(x) = x^k$ е конвексна за $x > 0$ и во случај кога $k = 3, 4, 5, \dots$ ќе го примениме методот на математичка индукција.

Да претпоставиме дека функцијата x^k е конвексна за $k = r$ каде што r е некој природен број, т.е.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^r < \frac{x_1^r + x_2^r}{2}. \quad (15)$$

По множењето со позитивниот број $\frac{x_1 + x_2}{2}$ неравенството (15) го добива обликот

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{r+1} < \frac{x_1^{r+1} + x_2^{r+1} + x_2 x_1^r + x_1 x_2^r}{4}. \quad (16)$$

Поаѓајќи од идентитетот $x_2 x_1^r + x_1 x_2^r + (x_1 - x_2)(x_1^r - x_2^r) = x_1^{r+1} + x_2^{r+1}$, заклучуваме дека

$$x_2 x_1^r + x_1 x_2^r < x_1^{r+1} + x_2^{r+1}$$

бидејќи двата множители $x_1 - x_2$ и $x_1^r - x_2^r$ се истовремено или позитивни или негативни. Оттука и од (16) се добива:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{r+1} < \frac{x_1^{r+1} + x_2^{r+1}}{2}$$

со што докажавме дека функцијата $f(x) = x^k$ за $x > 0$ и за k - природен број е конвексна.

Како последица од тврдењето дека функцијата $f(x) = x^k$ за $x > 0$ и за k - природен број е конвексна го добиваме неравенството:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^k \leq \frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}$$

за секои позитивни реални броеви x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

За $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ова неравенство преминува во равенство.



Задачи за самостојна работа

1. Ако $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ ($b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$) се две множества на реални броеви и ако M и m се соодветно најголемиот и најмалиот меѓу броевите

$$a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

тогаш

$$mb_1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq Mb_1. \text{ Докажи! (Абелово неравенство)}$$

2. Нека a_i и b_i , $i = 1, 2, \dots, n$ се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството:

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} + \sqrt{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Во кој случај важи равенство?

3. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството $n! \geq n^{\frac{n}{2}}$.

4. За функцијата $f(x)$ која е дефинирана на сегментот $[\alpha, \beta]$, велиме дека е **конкавна**, ако за секои $a, b \in [\alpha, \beta]$ важи $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\{f(a) + f(b)\}$. Докажи дека $f(x) = \sin x$, $x \in (0, \pi)$ е **конкавна** функција.

3.6. Задачи за вежбање

1. Најди го множеството решенија на неравенките:

а) $x - 7 < 6$,

б) $5x - 3 < 2x - 6$,

в) $1,4x - 10,7 < 2,8 + 0,5x$,

г) $3(x-1) + (x-4)(x-3) > (x-2)(x+6)$,

д) $\frac{x-3}{2} - 1 > \frac{3x+2}{5} - 3x$.

2. Реши ги неравенките со апсолутни вредности:

а) $\left| \frac{2x-5}{2x-1} \right| < \frac{1}{2}$,

б) $\left| \frac{6x-2}{1-3x} \right| \geq -2$,

в) $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 1$.

3. Запиши ги како неравенки со апсолутни вредности двојните неравенки:

а) $-3 < x + 2 < 3$,

б) $-\frac{1}{2} < x + \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$,

в) $-1,5 < \frac{x+1}{x+2} < 1,5$.

4. Докажи дека за секој природен број n важи $n! \leq \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$.

5. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се n позитивни броеви и $b_1, b_2, \dots, b_n$ е една нивна пермутација. Докажи дека:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

6. Докажи дека за произволни природни броеви a, b и c важи неравенството:

$$a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

7. Користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина докажи ги неравенствата:

а) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$,

б) $(a+b+c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$,

в) $2a^3 + 11 > 9a$,

г) $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$.

8. Ако $2x + 4y = 1$, тогаш $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$. Докажи!

9. Докажи дека за позитивните броеви a и b важи неравенството:

а) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$,

б) $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Во кој случај важи равенство?

10. Ако $a + b \geq 1$, тогаш $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$. Докажи!

11. Ако a, b, c се природни броеви, докажи дека $ab + bc + ca \leq 3abc$.

12. Докажи дека $(a-x) \cdot (a-y) \cdot (a-z) > 8xyz$, ако x, y, z се позитивни броеви и $x + y + z = a$.

13. Ако $x + y + z = 1$ тогаш $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$. Докажи!

14. Ако $a > 1$ и $b < 1$, докажи дека $ab + 1 < a + b$.

4. ПОЛИНОМИ

4.1. Основни поими за полиноми

1. Ако x е произволен реален број, тогаш на пример, $(x-1)(x+1)^2$, $(x^2-1)(x+1)$, $(x^2+2x+1)(x-1)$, $x^4-3(x^3+1)+2(x-1)^2$ се цели рационални алгебарски изрази со променлива x . По ослободување од заградите и сведување на сличните членови, лесно се покажува дека секој од првите три изрази е идентичен со целиот рационален израз: x^3+x^2-x-1 , а последниот е идентичен со изразот: $x^4-3x^3+2x^2-4x-1$.

Дефиниција 1.

Изразот $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ (1) каде што $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ се избрани елементи од дадено бројно поле (реално или комплексно), n е природен број, а x - променлива која што прима вредности од истото поле се нарекува **полином** од n -ти степен по x .

Броевите $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ се викаат **коэффициенти** на полиномот, или поточно коэффициенти пред соодветните степени на променливата x во полиномот (1). Согласно со дефиницијата, полиномот (1) е од n -ти степен, само при услов $a_n \neq 0$. Затоа велиме дека бројот a_n е **водечки** (или најстар) **коэффициент** на полиномот (1), а коэффициентот a_0 се вика **слободен член**. Ако $a_n = 1$, тогаш за полиномот велиме дека е во **нормален вид**.

За скратено означување на полиномите од променлива x , често ги користиме симболите: $P(x), Q(x), f(x), g(x)$ или $P_n(x), Q_n(x), f_n(x)$ итн. ако сакаме да истакнеме дека тој е од n -ти степен. Така на пример, равенството

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0 \quad (2)$$

ќе го сфаќаме и читаме како: „ $P(x)$ е полиномот од десната страна од (2)“, или „полиномот (1) е означен со $P(x)$ “. Значи, знакот „ $=$ “ тука ни појаснува само што е означено со $P(x)$, слично како при записот на елементарните функции, на пример $f(x) = \sin x$.

Полиноми од трет, втор и прв степен по x соодветно се:

$$P_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (a_3 \neq 0)$$

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (a_2 \neq 0), \quad P_1(x) = a_1 x + a_0, \quad (a_1 \neq 0).$$

Најнискиот степен на еден полином од x би требало да е еден, меѓутоа во работата со полиноми, посебно кај операциите со нив, целисходно е да прифатиме дека имаме полиноми од нулти степен. $P_0(x)$ - полином од нулти степен е секој елемент од полето, различен од нула. Навистина, бројот $a_0 \neq 0$ може да се запише во видот $a_0 x^0$, бидејќи $x^0 = 1$. Значи: $P_0(x) = a_0$, $(a_0 \neq 0)$.

Од истите причини (при операциите со полиноми) бројот нула ќе го викаме **нула-полином** или **нулти полином** (не значи исто што и полиномот од нулти степен). Тоа е единствен полином на кој не му припишуваме никаков степен. Затоа полиномот (1) кај кој $a_0 \neq 0$ уште се вика **ненула полином**. Меѓутоа, под зборот полином секогаш ќе подразбираме **ненула полином**, без тоа посебно да го нагласуваме.

По однос на коефициентите на полиномот (1) од дефиницијата 1 ставен е само еден услов: $a_n \neq 0$, што значи дека некои (или сите останати) коефициенти можат да бидат и еднакви на нула. Во таа смисла за полиномот од четврти степен $5x^4 + 1$ можеме да сметаме дека има и членови од трет, втор и прв степен со коефициенти еднакви на нула. Тој, всушност, е еднаков на полиномот: $5x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$.

Да забележиме дека за полином од n -ти степен, покрај неговото запишување во видот (2), т.е. по опаднувачките степени на променливата x , допуштено е да го запишуваме по растечките степени на x :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (a_n \neq 0) \quad (3)$$

согласно комутативноста и асоцијативноста на собирањето во секое поле.

Ако $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ се реални броеви, полиномот (1), односно (3) се вика **полином со реални коефициенти**, или **реален полином**. Ако барем еден од коефициентите $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ е комплексен број, тогаш полиномот (1) се вика **полином со комплексни коефициенти**, или **комплексен полином**.

Ако сите коефициенти на еден полином се цели броеви, тој се вика **полином со цели коефициенти**, или **целоброен полином**, а ако сите коефициенти му се рационални броеви, тогаш тој се вика **полином со рационални коефициенти** или **рационален полином**. Очигледно е дека секој полином со цели коефициенти, во исто време е рационален, реален и комплексен, согласно инклузиите: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Даден полином можеме да го разгледуваме во различни бројни множества. При тоа: ако полиномот $P(x)$ сакаме да го разгледуваме над множеството на целите броеви $\mathbb{Z}$, тогаш тој мора да е со цели коефициенти и променливата x може да зема вредности само од множеството на целите броеви $\mathbb{Z}$, т.е. $x \in \mathbb{Z}$. Ако, пак, полиномот $P(x)$ го разгледуваме над полето на рационалните (односно реалните) броеви, тогаш неговите коефициенти треба да се дадени рационални (односно реални) броеви и променливата x може да зема кои било рационални (односно реални) вредности.

Тоа значи дека даден полином $P(x)$ со цели коефициенти, освен над множеството на целите броеви можеме да го разгледуваме и во полето на рационалните и во полето на реалните броеви, па дури и над полето на комплексните броеви.

$$\text{Изразот } 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x + 0, \quad (4)$$

кој има структура на полином $P(x)$ од n -ти степен, очигледно е дека за секоја вредност на x добиваме вредност нула. Затоа за изразот (4) велиме дека тој е **полином идентички еднаков на нула** или **нула-полином** и пишуваме $P(x) \equiv 0$.

Нека $P(x)$ е полином од променливата x над некое поле, а c - избран број од истото поле. Со $P(c)$ го означуваме бројот

$$a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \dots + a_1c + a_0,$$

што се добива кога во изразот - полиномот (1) променливата x се замени со c и се извршат сите назначени операции. Бројот $P(c)$ се вика **вредност на полиномот $P(x)$ при $x=c$** , или вредност на $P(x)$ во точката c . Процесот на одредување на бројот $P(c)$ се вика **пресметување** (наоѓање), **вредноста на полиномот $P(x)$ за $x=c$** (или во точката c).

Секој број (или точка) $x=c$, за кој полиномот $P(x)$ добива вредност нула, т.е. $P(c)=0$, се вика **нула на полиномот** или **корен на полиномот $P(x)$** . На пример, бројот 2 е нула на полиномот $P(x)=x^3-3x^2+5x-6$, бидејќи за $x=2$ е точно дека $P(2)=2^3-3 \cdot 2^2+5 \cdot 2-6=0$. Затоа се вели и пишува: $x=2$ е нула на полиномот $P(x)$.

За полиномите

$$A_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, (a_n \neq 0) \quad (4)$$

$$B_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0, (b_m \neq 0) \quad (5)$$

велиме дека се идентично еднакви и пишуваме $A_n(x) \equiv B_m(x)$ ако тие добиваат еднакви вредности за секоја вредност на променливата x .

Симболот „ $\equiv$ “ ќе го користиме за да не дојде до мешање на поимите „еднакви вредности“ и „идентични полиноми“. Пред да ја докажеме наредната теорема, ќе го дадеме следното помошно тврдење (лема).

Лема

Ако полиномот $P(x)$ прима вредност нула, т.е. $P(x) = 0$ за секоја вредност на x , тогаш $P(x)$ е нулти полином.

Теорема 1.

Два полинома $A_n(x)$ и $B_m(x)$ се идентични ако и само ако тие имаат еднакви степени и коефициентите на сличните членови (пред еднаквите степени на x) се соодветно еднакви, т.е. $n = m, a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_m$. (6)

Тоа значи дека условите (6) се и потребни и доволни за да биде

$$A_n(x) \equiv B_m(x).$$

Доказ: а) Условите (6) се потребни:

Ако $A_n(x) \equiv B_m(x)$, тогаш разликата $R(x) = A_n(x) - B_m(x) \equiv 0$ е нула полином.

Полиномите $A_n(x)$ и $B_m(x)$ не можат да имаат различни степени, бидејќи ако $n \neq m$, тогаш водечкиот коефициент на полиномот $R(x)$ би бил еден од броевите a_n или b_m . Значи еден од тие коефициенти ќе биде еднаков на нула; а тоа противречи на претпоставката дека $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$. Според тоа: $n = m$, па ќе биде:

$$R(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 - b_0) \equiv 0 \quad (7)$$

Но, бидејќи $R(x)$ е нула полином, затоа од (7) и од претходната лема следува дека:

$$\begin{cases} a_0 - b_0 = 0 \\ a_1 - b_1 = 0 \\ \dots, \text{ односно} \\ a_n - b_n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ \dots, \text{ што требаше да се докаже.} \\ a_n = b_n \end{cases}$$

б) Условите (6) се доволни: Ако полиномите $A_n(x)$ и $B_m(x)$ имаат еднакви степени, т.е. $m = n$ и коефициентите на сличните членови им се соодветно еднакви, тогаш очигледно е дека тие два полиноми потполно се совпаѓаат, па според тоа тие се идентично еднакви, што требаше да се докаже.



Задачи за самостојна работа

1. Одреди ја непосредно вредноста на полиномот:

а) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ за $x = -2$, б) $Q(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 10$ за $x = 1$,

в) $R(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ за $x = 2$.

2. Провери дали $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$ се нули на полиномот

$$P(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4.$$

3. Покажи дека важат идентитетите:

а) $(x-1)(x+1)(x^2+1) \equiv x^4 - 1,$

б) $x^4 + x^2 + x \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),$

в) $x^6 - 1 \equiv (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1).$

4. Определи ги непознатите коефициенти, така што да важат идентитетите:

а) $a_0x^2 - 2x + 1 \equiv b_0x^3 - 4x^2 + b_2x + b_3,$ б) $Ax^3 + 3x^2 + Cx - 5 \equiv 2x^3 + Dx^2 - x + F,$

в) $(x-a)^2 + C \equiv x^2 - 6x + 7.$

4.2. Собирање и множење на полиноми

Нека $A_n(x)$ и $B_m(x)$ се два полинома со реални или комплексни коефициенти

$$A_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, a_n \neq 0 \quad (1)$$

$$B_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m, b_m \neq 0 \quad (2)$$

и $n \geq m$ без губење од општоста.

Дефиниција 1.

Збир на полиномите $A_n(x)$ и $B_m(x)$ се нарекува полиномот:

$$A_n(x) + B_m(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n, \quad (3)$$

чии коефициенти се добиваат со собирање на коефициентите на $A_n(x)$ и $B_m(x)$ што стојат пред еднаквите степени на x , т.е. $c_i = a_i + b_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ и $c_i = a_i$, $i = m+1, \dots, n$.

Очигледно е дека степенот на збирот $A_n(x) + B_m(x)$ ќе биде еднаков на n ако $n > m$. Но, при $n = m$ степенот на збирот $A_n(x) + B_m(x)$ може да биде и помал од n ако $b_n = -a_n$.

Заклучок: Збирот на два полинома A_n и B_m е полином со степен најмногу еднаков на степенот на поголемиот од броевите m и n .

Пример 1 Најди го збирот на полиномите:

$$A(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x + 1 \text{ и } B(x) = 3x^4 - x^2 + 5.$$

Решение. $A(x) + B(x) = (x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x + 1) + (3x^4 - x^2 + 5) =$

$$= (1+0)x^5 + (-2+3)x^4 + (3+0)x^3 + (0-1)x^2 + (-2+0)x + (1+5) =$$

$$= x^5 + x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x + 6.$$

Пример 2

Збирот на произволен полином $P(x)$ со нултиот полином е истиот полином $P(x)$.

Дефиниција 2.

Спротивен полином $-P(x)$ на полиномот $P(x)$ е полином чии коефициенти се спротивни на коефициентите на полиномот $P(x)$ пред степните соисти показатели.

Дефиниција 3.

Разлика $A(x) - B(x)$ на полиномите $A(x)$ и $B(x)$ се нарекува полиномот $R(x) = A(x) + (-B(x))$.

Според тоа, одземањето на полиноми се сведува на додавање на спротивниот полином на полиномот намалител.

Пример 3

Одземи го полиномот $B(x)$ од полиномот $A(x)$, ако

$$A(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1, \quad B(x) = -x^4 + x^3 - 5x^2 + 4.$$

Решение. $A(x) - B(x) = A(x) + (-B(x)) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1 + (x^4 - x^3 + 5x^2 - 4) =$
 $= (1+1)x^4 + (-3-1)x^3 + 5x^2 + 2x + (-1-4) = 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 5.$

Дефиниција 4.

Производ на полиномите (1) и (2) ќе го викаме полиномот

$$A_n(x) \cdot B_m(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_{n+m-1}x^{n+m-1} + d_{n+m}x^{n+m}, \quad (5)$$

$$d_i = \sum_{k+s=i} a_k b_s, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n+m-1, n+m \quad (5')$$

Пример 4

Најди го производот на полиномите:

$$P(x) = -2x^3 + x^2 - 3 \text{ и } Q(x) = x^2 + x - 1.$$

Решение. Изоставајќи ги нултите собироци добиваме:

$$P(x) \cdot Q(x) = ((-2) \cdot 1)x^5 + ((-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1)x^4 + ((-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1)x^3 + (1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1)x^2 +$$

$$+ ((-3) \cdot 1)x + (-3) \cdot (-1) = -2x^5 - x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 3$$

Да забележиме дека согласно (5') коефициентот d_i е еднаков на збирот од производите на оние коефициенти на полиномот $A_n(x)$ и $B_m(x)$, на кои збирот од индексите им е еднаков на i .

$$\text{Затоа: } d_0 = a_0 b_0, \quad d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,$$

$$d_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0, \dots, d_{n+m} = a_n b_m.$$

Видејќи $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$, и $a_n \cdot b_m \neq 0$, а оттука следува

Заклучок: Производот на два нененулни полиноми е полином со степен еднаков на збирот на степените на полиномите-множители.

Од дефинициите 1 и 2 следува дека операциите собирање и множење на полиномите, всушност, се сведуваат на операции со нивните коефициенти. На пример, собирањето на два полиноми се сведува на собирање на коефициентите при еднаквите степени на x , а множењето - на множење и собирање на нивните коефициенти. Претходно изнесеното може да се резимира на следниот начин.

Множеството на полиноми е затворено во однос на операциите собирање и множење, и притоа важат следниве идентитети за произволни полиноми $A(x), B(x), C(x)$:

- i) $A(x) + B(x) = B(x) + A(x)$ (комутативност на собирањето)
- ii) $(A(x) + B(x)) + C(x) = A(x) + (B(x) + C(x))$ (асоцијативност на собирањето)
- iii) $A(x) + 0 = 0 + A(x) = A(x)$ (постои неутрален елемент во однос на собирањето)
- iv) $A(x) + (-A(x)) = (-A(x)) + A(x) = 0$ (постои спротивен елемент во однос на собирањето)
- v) $A(x)(B(x) + C(x)) = A(x)B(x) + A(x)C(x)$ (лев дистрибутивен закон)
- vi) $(B(x) + C(x))A(x) = B(x)A(x) + C(x)A(x)$ (десен дистрибутивен закон)
- vii) $(A(x)B(x))C(x) = A(x)(B(x)C(x))$ (асоцијативен закон за множењето).

Погорните равенства се докажуваат на следниот начин. За секоја вредност на променливата x , левите страни на овие равенства се еднакви на десните страни, бидејќи $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ се броеви и за нив важат комутативниот, асоцијативниот и дистрибутивниот закон. Штом за секоја вредност на променливата x левата и десната страна се еднакви, полиномите се идентични, т.е. еднакви.

Во множеството на сите полиноми од променливата x , при операцијата собирање на полиноми улогата на неутрален елемент ја игра бројот нула, односно нула-полиномот. Така за секој полином $P(x)$ важи:

$$P(x) + 0 = 0 + P(x) = P(x) \quad (6)$$

Потоа, во множеството на сите полиноми од x за секој полином $P(x)$ постои нему спротивен полином $-P(x)$ за кој важи:

$$P(x) + (-P(x)) = 0 \quad (7)$$

Нека $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ е даден полином, а нему спротивен е полиномот

$$-P(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0, \text{ каде што } b_i = -a_i.$$

Да забележиме дека улогата на полиномот единица (неутрален елемент) при множењето на полиноми ја игра бројот 1, разгледуван како полином од нулти степен. Да видиме уште дали за секој полином $P(x)$ постои негов инверзен елемент $P^{-1}(x)$ во однос на операцијата множење, т.е. за кој важи

$$P(x) \cdot P^{-1}(x) = 1. \quad (8)$$

Јасно е дека $P(x)$ (и $P^{-1}(x)$) мора да биде полином различен од нултиот. Ќе покажеме дека полиномот $P(x)$ има свој инверзен елемент $P^{-1}(x)$ ако и само ако $P(x)$ е полином од нулти степен. Навистина, ако $P(x) = a_0 \neq 0$, тогаш неговиот инверзен елемент е бројот $a_0^{-1} = \frac{1}{a_0}$.

Ако полиномот $P(x)$ има степен $n \geq 1$, тогаш левата страна на равенството (8) како производ на два ненула полиноми, ако постои полиномот $P^{-1}(x)$, ќе има степен не помал од n , додека, пак, десната страна е полином од нулти степен, што претставува противречност. Значи, таков полином $P^{-1}(x)$ не постои ако $n \geq 1$. Оттука следува дека за операцијата множење на полиноми не постои инверзна операција.

Погорните резултати можат да се резимираат во вид на:

Теорема 1.

Множеството полиноми од променливата x над полето на реалните (или комплексните) броеви со операциите собирање и множење образува прстен со единица.

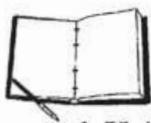
Бидејќи за множеството на полиномите важат комутативниот и асоцијативниот закон ($AB=BA$, $A(BC)=(AB)C$), и постои неутрален елемент 1 за множењето, велиме дека прстенот на полиномите е комутативен и асоцијативен со единица.

Оттука и големата сличност (аналогија) што ја забележуваме помеѓу множеството полиноми и множеството цели броеви.

Пример 5 Најди го производот на полиномите:

$$A(x) = x^3 + 5x + 2 \quad \text{и} \quad B(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 7.$$

Решение. $A(x) \cdot B(x) = (x^3 + 5x + 2) \cdot (2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 7) =$
 $= 2x^7 - 3x^6 + 4x^5 + 7x^3 + 10x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 35x + 4x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 14 =$
 $= 2x^7 - 3x^6 + 14x^5 - 11x^4 + 21x^3 + 8x^2 + 35x + 14.$



Задачи за самостојна работа

1. Најди го збирот на полиномите: $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4$ и $Q(x) = x^2 - 3x + 1$.

2. Најди го производот на полиномите:

а) $A(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$ и $B(x) = x^2 - 3x + 5$,

б) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 4$ и $Q(x) = -2x^3 + x^2 - 4x + 1$.

3. Изврши го множењето:

а) $(x+2)(x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1)$, б) $(x+2)(x-2)(x^2 - 3x + 2)$,

в) $(x-2)^2(x+3)^2(x+1)$.

4. Изврши ги назначените операции:

а) $(x^3 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 1) + (x^4 - 1)(x^3 + 2x^2 - x + 2) - (x^3 + 2x^2 - x + 4)$,

б) $x(x+1)(x+2)(x+3) - (x^2 - 1)(x^2 + x + 1) + (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$.

4.3. Делење на полиноми

За разлика од операциите собирање и множење на полиноми, кога операцијата е точно дефиниран полином, операцијата делење на полиноми не секогаш дава полином кој помножен со полиномот-делител ќе го даде полиномот деленик. Значи, ако $f_n(x)$ и $g_m(x)$ се два произволни полиноми, тогаш не секогаш може да се одреди трет полином $q_{n-m}(x)$, таков што да важи: $f_n(x) = g_m(x) \cdot q_{n-m}(x)$. Во тој поглед множеството полиноми пак наликува на множеството цели броеви. Слично како кај множеството цели броеви и за множеството полиноми постои алгоритам за делење со остаток, кој го воведуваме со следнава:

Дефиниција 1. Да се подели полиномот $f_n(x)$ со полиномот $g_m(x) \neq 0$, значи да се одредат два нови полиноми $q(x)$ - количник и $r(x)$ - остаток, такви што да важи идентитетот

$$f_n(x) = g_m(x) \cdot q(x) + r(x) \quad (1)$$

и степенот на $r(x)$ да е барем за единица помал од m (степенот на $g_m(x)$).

Очигледно е дека степенот на полиномот $q(x)$ ќе биде еднаков на разликата од степените на полиномите $f_n(x)$ и $g_m(x)$, т.е. на $n - m$. Се поставува прашањето: дали за секои два дадени полиноми $f_n(x)$ и $g_m(x) \neq 0$ секогаш постојат такви два полиноми $q(x)$ и $r(x)$ за кои важи идентитетот (1) и степенот на $r(x)$ да е помал од m ? И ако такви полиноми постојат дали тие се еднозначно определени?

Потврден одговор на тие прашања ни дава следната:

Теорема 1. За кои било два полиноми $f_n(x)$ и $g_m(x) \neq 0$ постојат еднозначно определени полиноми $q(x)$ и $r(x)$ што ги задоволуваат условите:

- i) важи идентитетот $f_n(x) = g_m(x) \cdot q(x) + r(x)$
- ii) степенот на $r(x)$ е помал од m .

Пред да пристапиме кон доказот на теоремата, да се потсетиме на постапката на делење на полиноми.

Пример 1 Да го извршиме делењето со остаток на полиномот

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \text{ со } g(x) = x^2 - 3x + 1.$$

Решение. Гледаме дека полиномите се подредени по опаѓнувачките степени на x , а делењето практично го извршуваме вака:

$$\begin{array}{r} (x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1) = x^3 + x^2 - x \\ \underline{\pm x^5 \mp 3x^4 \pm x^3} \\ f_4(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \\ \underline{\pm x^4 \mp 3x^3 \pm x^2} \\ f_3(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x + 6 \\ \underline{\mp x^3 \pm 3x^2 \mp x} \\ f_1(x) = -4x + 6 = r(x) \end{array}$$

Бидејќи $f_1(x) = -4x + 6$ е полином со степен 1, помал од степенот 2 на $g(x)$, процесот на делење не може да продолжи, па добиваме дека количникот од делењето е $q(x) = x^3 + x^2 - x$, а остатокот $r(x) = -4x + 6$. Притоа:

$$x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (x^3 + x^2 - x)(x^2 - 3x + 1) - 4x + 6$$

Доказ на теорема 1. Нека $f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$),

$$g_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \quad (b_m \neq 0),$$

a) Постоење на количник и остаток.

Случајот $n < m$ е тривијален, бидејќи тогаш $q(x) = 0$ и $r(x) = f_n(x)$ го исполнува условот (1),

$$f_n(x) = g_m(x) \cdot 0 + f_n(x).$$

Затоа, да претпоставиме дека $n \geq m$ и нека $h'(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$. Тогаш,

$$f_n(x) - g_m(x) \cdot h'(x) = 0 \cdot x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_1x + c_0$$

каде што

$$c_{n-i} = a_{n-i} - \frac{a_n}{b_m} b_{m-i}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$c_{n-i} = a_{n-i}, \quad i = m+1, \dots, n$$

Нека $i = s_1$ е најмалиот индекс за кој $c_{n-s_1} \neq 0$ и притоа $n - s_1 \leq n - 1$. Тоа значи дека

$$f_n(x) - g_m(x)h'(x) = c_{n-s_1}x^{n-s_1} + c_{n-s_1-1}x^{n-s_1-1} + \dots + c_1x + c_0.$$

Означувајќи $f_{n-s_1}(x) = c_{n-s_1}x^{n-s_1} + \dots + c_1x + c_0$ се добива равенството

$$f_n(x) = g_m(x)h'(x) + f_{n-s_1}(x),$$

каде што s_1 е најмалку 1. Ако $n - s_1 < m$, тогаш добиено е бараното равенство (1) со $h'(x)$ во улога на $q(x)$ и $f_{n-s_1}(x)$ во улога на $r(x)$.

Ако $n - s_1 \geq m$, тогаш се повторува постапката за $f_{n-s_1}(x)$ (којшто има степен најмногу $n - 1$) во улога на $f_n(x)$ и притоа се добива

$$f_{n-s_1}(x) = g_m(x)h''(x) + f_{n-s_2}(x)$$

каде што $n - s_2 \leq n - s_1 - 1$, т.е. $s_2 > s_1$.

Сега, ако $n - s_2 < m$, тогаш равенството

$$f_n(x) = g_m(x)(h'(x) + h''(x)) + f_{n-s_2}(x)$$

го задоволува условот (1) со $q(x) = h'(x) + h''(x)$ и $r(x) = f_{n-s_2}(x)$.

Ако $n - s_2 \geq m$, тогаш постапката се повторува за $f_{n-s_2}(x)$ во улога на $f_n(x)$ и се добива равенството

$$f_{n-s_2}(x) = g_m(x) \cdot h'''(x) + f_{n-s_3}(x)$$

каде што $n - s_3 < n - s_2 - 1$, т.е. $s_3 > s_2$.

Притоа во случајот $n - s_3 < m$ е добиено бараното претставување, имено

$$f_n(x) = g_m(x)(h'(x) + h''(x) + h'''(x)) + f_{n-s_3}(x)$$

со $q(x) = h'(x) + h''(x) + h'''(x)$ и $r(x) = f_{n-s_3}(x)$.

Ако $n - s_3 \geq m$ процесот продолжува. Бидејќи n е конечен број, при некоја конечна постапка $k \leq n - m + 1$ ќе се добие

$$f_{n-s_{k-1}}(x) = g_m(x) \cdot h^{(k)}(x) + f_{n-s_k}(x)$$

така што $f_{n-s_k}(x)$ има степен $n - s_k < m$. Тогаш

$$f_n(x) = g_m(x)(h'(x) + h''(x) + \dots + h^{(k)}(x)) + f_{n-s_k}(x)$$

е бараното претставување (1) со

$$q(x) = h'(x) + h''(x) + \dots + h^{(k)}(x) \text{ и } r(x) = f_{n-s_k}(x).$$

б) Единственост на количникот и остатокот.

Нека постојат и други полиноми $q_1(x)$ и $r_1(x)$ што ги задоволуваат бараните услови.

Тогаш

$$f_n(x) = q(x)g_m(x) + r(x) = q_1(x)g_m(x) + r_1(x),$$

$$g_m(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x).$$

Но, степенот на $r_1(x) - r(x)$ е помал од m (степенот на $g_m(x)$) и последното равенство повлекува $q(x) - q_1(x) = 0$. Тогаш и $r_1(x) - r(x)$ е нулти полином. Затоа, $r_1(x) = r(x)$ и $q_1(x) = q(x)$.

Посебен интерес претставува делењето на кој било полином $f(x)$ од n -ти степен со линеарен полином $x - c$ (односно со биномот $x - c$), каде што c е некој број.

Во тој случај, бидејќи делителот $g(x)$ во (1) е од прв степен, остатокот $r(x)$ ќе биде некој полином од нулти степен, или нула, т.е. во секој случај некој број r . Притоа ќе важи идентитетот

$$f(x) \equiv (x - c) \cdot q(x) + r \quad (2)$$

каде што $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$.

Следнава теорема ни дава можност да го одредиме остатокот r од делењето на полиномот $f(x)$ со биномот $x - c$, а без да го вршиме тоа делење.

Теорема на Безу

Остатокот од делењето на полином $f(x)$ со биномот $x - c$ е еднаков на вредноста $f(c)$ на полиномот $f(x)$ за $x = c$.

Доказ: Идентитетот (2) важи за секој x , па според тоа ќе важи и за $x = c$. Ако во двете страни на (2) замениме $x = c$, добиваме: $f(c) \equiv (c - c) \cdot q(c) + r$, односно, $f(c) = r$. Со тоа теоремата е докажана.

Пример 2 Да го одредиме остатокот r од делењето на полиномот

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \text{ со биномот } x + 2.$$

Решение. Согласно теоремата на Безу бараниот остаток r е еднаков на $f(-2)$, а вредноста $f(-2) = (-2)^4 + 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - (-2) + 1 = 15$.

Бараниот остаток можеме да го одредиме и со делењето:

$$(x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1) : (x + 2) = x^3 + 3x - 7$$

$$\begin{array}{r} \underline{+ x^4 + 2x^3} \\ 3x^2 - x + 1 \\ \underline{+ 3x^2 + 6x} \\ -7x + 1 \\ \underline{+ 7x + 14} \\ 15 = r \end{array}$$

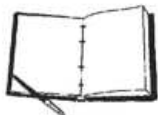
$$\text{т.е. } x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv (x + 2)(x^3 + 3x - 7) + 15.$$

Пример 3 Да го извршиме делењето со остаток на полиномот

$$f(x) = x^3 - x^2 - x \text{ со } g(x) = x - (1 - 2i)$$

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - x^2 - x) : [x - (1 - 2i)] = x^2 - 2ix - (5 + 2i) \\
 \underline{\pm x^3 \mp m(1 - 2i)x^2} \\
 -2ix^2 - x \\
 \underline{m2ix^2 \pm 2i(1 - 2i)x} \\
 -(1 + 2i - 4i^2)x = -(5 + 2i)x \\
 \underline{m(5 + 2i)x \pm (1 - 2i)(5 + 2i)} \\
 -(5 - 10i + 2i - 4i^2) = -9 + 8i
 \end{array}$$

Значи, $x^3 - x^2 - x = [x - (1 - 2i)] \cdot [x^2 - 2ix - (5 + 2i)] - 9 + 8i$.



Задачи за самостојна работа

1. Одреди го количникот $g(x)$ и остатокот $r(x)$ при делење на полиномот $2x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 21x - 2$ со $2x^2 + 5x - 1$.

2. Изврши го делењето на полиномите со остаток:

а) $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 5) : (x^2 - 3x + 1)$,

б) $(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) : (3x^2 - 2x - 1)$,

в) $(x^5 - 5x^4 + x^3 - 2x^2 + 3) : (x^2 - x + 1)$,

г) $(x^7 - 1) : (x^4 + x^2 + 1)$,

д) $(x^5 + 1) : (x^3 + x + 1)$.

3. Одреди го количникот и остатокот од делењето на полиномот $P(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ со биномот $x - 3$.

4. Изврши го делењето на:

а) $2x^5 - 5x^3 - 8x$ со $x + 3$,

б) $x^4 - 3x^3 + 2x - 1$ со $x - 1$,

в) $x^3 - 2x^2 + x - 1$ со $x - i$,

г) $4x^3 + x^2$ со $x + 1 + i$.

5. Одреди го остатокот од делењето на полиномот $P(x) = x^{50} - x^{30} + x^{10} - 4$ со $x^2 - 1$.

4.4. Деливост на полиноми

Дадени се два ненула полиноми $f(x)$ и $g(x)$ со комплексни или реални коефициенти. Ако остатокот $r(x)$ од делењето на $f(x)$ со $g(x)$ е нула полином, т.е. ако $r(x) \equiv 0$, тогаш велиме дека полиномот $f(x)$ се дели без остаток со полиномот $g(x)$, или дека тој е делив со полиномот $g(x)$.

Дефиниција 1.

Полиномот $f(x)$ велиме дека е делив со ненулта полином $g(x)$ ако и само ако постои полином $q(x)$ таков што да важи идентитетот

$$f(x) \equiv g(x) \cdot q(x). \quad (1)$$

За полиномот $g(x)$, пак, велиме дека е делител на полиномот $f(x)$. Всушност, ако $g(x)$ е делител на $f(x)$, тогаш $q(x)$ треба да го земеме како количник од делсњето на $f(x)$ со $g(x)$. Навистина, од (1) го добиваме равенството

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) \quad (2)$$

кое важи за сите вредности на x , за кои $g(x) \neq 0$.

Пример 1 Полиномот $x^3 + 1$ е делив со полиномот $x + 1$, бидејќи важи

$$x^3 + 1 \equiv (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Очигледно е дека ако важи равенството (1), тогаш полиномот $q(x)$, е исто така, делител на $f(x)$.

Во случај кога $g(x)$ е делител на $f(x)$, односно кога $f(x)$ се дели без остаток со $g(x)$, тоа често симболички го запишуваме со: $g(x) | f(x)$ (3)

кое го читаме: „ $g(x)$ е делител на $f(x)$ “, или „ $g(x)$ го дели $f(x)$ “.

Д: забележиме дека ако полиномот $f(x)$ и неговиот делител $g(x)$ се со реални (рационални) коефициенти, тогаш полиномот - количник $q(x)$ е, исто така, со реални (рационални) коефициенти. Меѓутоа, полином со реални (рационални) коефициенти може да има и делители, чии коефициенти или слободни членови се комплексни (ирационални) броеви. Тоа го покажува следниот пример.

Пример 2 $x^2 - \frac{1}{2} = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad x^2 + 2 = (x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2}).$

Деливоста кај полиномите ги има следниве поважни својства:

Теорема 1.

Ако полиномот $f(x)$ е делив со полиномот $g(x)$, тогаш постои само еден единствен полином - количник $q(x)$.

Теорема 2.

Ако полиномот $f(x)$ е делив со $g(x)$, а $g(x)$ е делив со полиномот $h(x)$, тогаш $f(x)$ е делив со $h(x)$.

Доказ. Нека $f(x) \equiv g(x) \cdot q(x)$ и $g(x) \equiv h(x) \cdot \varphi(x)$. Тогаш

$$f(x) \equiv [h(x) \cdot \varphi(x)] \cdot q(x) \equiv h(x) \cdot [\varphi(x) \cdot q(x)].$$

Теорема 3.

Ако секој од полиномите $f(x)$ и $g(x)$ е делив со $h(x)$, тогаш и нивниот збир и разлика се деливи со $h(x)$.

Доказ. Нека $f(x) \equiv h(x) \cdot q(x)$ и $g(x) \equiv h(x) \cdot \varphi(x)$. Тогаш

$$f(x) \pm g(x) \equiv h(x) \cdot q(x) \pm h(x) \cdot \varphi(x) \text{ или } f(x) \pm g(x) \equiv h(x) \cdot [q(x) \pm \varphi(x)].$$

Теорема 4. Ако $f(x)$ е делив со $\varphi(x)$, тогаш и производот на $f(x)$ со кој било полином $g(x)$ е делив со $\varphi(x)$.

Доказ. Нека $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot q(x)$. Тогаш $f(x) \cdot g(x) \equiv [\varphi(x) \cdot q(x)] \cdot g(x) \equiv \varphi(x)[q(x) \cdot g(x)]$.

Од теорема 3 и 4 следува следнава:

Последица 1. Ако секој од полиномите $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ е делив со $\varphi(x)$, тогаш со $\varphi(x)$ е делив и полиномот $f_1(x) \cdot g_1(x) + f_2(x) \cdot g_2(x) + \dots + f_k(x) \cdot g_k(x)$, каде што $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$ се произволни полиноми.

Теорема 5. Секој полином $f(x)$ е делив со кој било полином од нулти степен различен од 0.

Навистина, $f(x) \equiv c \left(\frac{a_0}{c} x^n + \frac{a_1}{c} x^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{c} \right)$, каде што c е произволен број различен од нула, т. е. произволен полином од нулти степен.

Теорема 6. Ако $f(x)$ е делив со $g(x)$, тогаш $f(x)$ е делив и со $c \cdot g(x)$, каде што c е произволен број различен од нула.

Доказ. Од равенството $f(x) \equiv g(x) \cdot q(x)$ следува и равенството

$$f(x) \equiv [c \cdot g(x)] \cdot [c^{-1} \cdot q(x)]$$

Теорема 7. Ако $f_n(x) \equiv g_m(x) \cdot q(x)$ и $g_m(x) \equiv f_n(x) \cdot h(x)$. Тогаш $m=n$, а $q(x)$ и $h(x)$ се полиноми од 0-ти степен.

Доказ. Нека k е степенот на $q(x)$, а s на $h(x)$. Тогаш $n = m + k$, а $m = n + s$ и оттука мора да биде $k + s = 0$. Бидејќи $k \geq 0$ и $s \geq 0$, $k + s = 0$ ако и само ако $k = s = 0$. Значи, $f_n(x) = c \cdot g_m(x)$ за некој број $c \neq 0$, а оттука $g_m(x) = c^{-1} f_n(x)$. Значи, $f_n(x)$ и $g_m(x)$ се истовремено деливи еден со друг. Од теоремите 2 и 7 следува следнава

Последица 2. Секој делител на еден од полиномите $f(x)$ и $c \cdot f(x)$ е делител и на другиот полином.

Дефиниција 2. Полиномот $f(x)$ велиме дека е неразложлив во дадено бројно поле P ако тој нема делители од ненулти степен помал од степенот на $f(x)$ со коефициенти од тоа поле.

Полиномот $f(x)$ се вика разложлив во полето P ако тој има барем еден делител од ненулти степен помал од степенот на $f(x)$ со коефициенти од полето P .

Секој полином од прв степен е неразложлив, бидејќи во спротивен случај тој би требало да се претстави во вид на производ од не помалку од два множители со степени не помали од еден; а тоа е невозможно.

Пример Полиномите: $x^3 + 1$ и $x^2 - 2$ може да се разложат како:

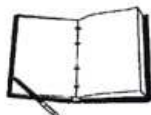
$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

Иако полиномот $x^2 - 2$ е разложлив на два полиноми со реални коефициенти, тој не е разложлив на два полиноми со цели (или рационални) коефициенти.



Задачи за самостојна работа

1. Провери дали полиномот $x^3 + x^2 - 17x + 15$ е делив со биномот:

а) $x + 5$, б) $x - 1$, в) $x + 1$, г) $x - 3$.

2. Покажи дека полиномот $x^3 + a^3$ е делив со $x + a$, но не е делив со $x - a$.

3. Провери дали полиномот $x^2 + a^2$, $a \in \mathbb{R}$ е делив со биномот:

а) $x + a$, б) $x - a$, в) $x + ai$, г) $x - ai$.

4. Покажи дека полиномот $x^{2k+1} - a^{2k+1}$ е делив со $x - a$ и одреди го полиномот - количник.

5. Одреди ги коефициентите a и b на полиномот $P(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$ така што тој да биде делив со $x - 2$ и со $x - 3$.

4.5. Нули на полиномите

Нека $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, (1)
т.е. $f(x)$ е полином од n -ти степен.

Да видиме каква врска постои меѓу нулите на полиномот $f(x)$ и неговите **линеарни делители**, т.е. делителите од видот $x - c$. Таа врска ја утврдува следнава важна:

Теорема 1. Бројот c е нула на полиномот $f(x)$ ако и само ако $f(x)$ е делив со $x - c$, т.е. ако $(x - c) \mid f(x)$.

Доказ: а) Нека бројот c е нула на полиномот $f(x)$, т.е. нека $f(c) = 0$. Но, според теоремата на Безу, остатокот од делењето на $f(x)$ со $x - c$ е еднаков на $r = f(c)$. Бидејќи $f(c) = 0$ и $r = 0$. Според тоа, полиномот $f(x)$ е делив со $x - c$.

б) Нека полиномот $f(x)$ е делив со $x - c$. Тогаш ќе важи идентитетот $f(x) = (x - c) \cdot q(x)$. Во тој случај за $x = c$ имаме $f(c) = (c - c) \cdot q(c) = 0$. Значи, бројот c е нула на $f(x)$.

Според тоа, одредувањето на нулите на полиномот $f(x)$ е еквивалентно со одредувањето на линеарните делители (фактори) на $f(x)$. Затоа гореспоменатата теорема ја викаме и теорема на факторизација на полиномот.

Теорема 2. Ако полиномот $f(x)$ од n -ти степен има k ($k \leq n$) различни нули $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$, тогаш $f(x)$ е делив со производот $(x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \dots \cdot (x - c_k)$.

Доказ: Бидејќи c_1 е нула на полиномот $f(x)$, тогаш врз основа на дефиницијата за деливост на полиноми имаме

$$f(x) \equiv (x - c_1) \cdot q_{n-1}(x). \quad (2)$$

Бидејќи и c_2 е нула на полиномот $f(x)$,

$$0 = f(c_2) = (c_2 - c_1) \cdot q_{n-1}(c_2).$$

Меѓутоа $c_2 \neq c_1$. Затоа мора да е $q_{n-1}(c_2) = 0$. Тоа значи дека c_2 е нула на полиномот $q_{n-1}(x)$, па затоа тој е делив со $x - c_2$, т.е.

$$q_{n-1}(x) \equiv (x - c_2) \cdot q_{n-2}(x). \quad (3)$$

Со замена на $q_1(x)$ од (3) во (2), добиваме:

$$f(x) \equiv (x - c_1)(x - c_2) \cdot q_{n-2}(x). \quad (4)$$

Бидејќи и c_3 е нула на полиномот $f(x)$:

$$0 = f(c_3) = (c_3 - c_1)(c_3 - c_2) \cdot q_{n-2}(c_3).$$

Но, бидејќи $c_3 \neq c_2 \neq c_1$, мора да биде $q_{n-2}(c_3) = 0$, а тоа значи дека c_3 е нула на полиномот $q_{n-2}(x)$, па затоа тој е делив со $x - c_3$, т.е.

$$q_{n-2}(x) \equiv (x - c_3)q_{n-3}(x). \quad (5)$$

Со замена на $q_{n-2}(x)$ од (5) во (4), добиваме:

$$f(x) \equiv (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \cdot q_{n-3}(x) \quad (6)$$

Ако оваа постапка ја продолжиме, ќе го добиеме идентитетот

$$f(x) \equiv (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \dots (x - c_k)q_{n-k}(x) \quad (7)$$

каде што $q_{n-k}(x)$ е полином од $(n-k)$ -ти степен, чиј водечки коефициент е еднаков на a_n . Со тоа теоремата 2 е докажана.

Користа од примената на равенството (7) ќе ја согледаме при решавањето на следниот пример:

Пример 1 Да докажеме дека полиномот $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ е делив со $g(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

Решение. Задачата би можела да се реши со извршување на множењето $(x - 1)(x + 2)(x - 3) = g(x)$, а потоа делењето на $f(x)$ со $g(x)$, па ако остатокот е нула, заклучуваме дека $g(x) \mid f(x)$. Меѓутоа, равенството (7) овозможува задачата да се реши само преку пресметување на вредностите $f(1), f(-2), f(3)$. Бидејќи $f(1) = 0, f(-2) = 0, f(3) = 0$ заклучуваме дека $g(x) \mid f(x)$.

Видовме дека, ако c е нула на полиномот $f(x)$, т.е. ако $f(c) = 0$ тогаш тој е делив со $x - c$. Меѓутоа, полиномот $f(x)$ понекогаш може да е делив освен со $x - c$ и со $(x - c)^k$, каде што $1 < k \leq n$. Во тој случај велиме дека бројот c е повеќекратна нула на полиномот.

Дефиниција 1.

За бројот $x=c$ велиме дека е повеќекратна нула со кратност k (или c е k -кратна нула) на полиномот $f(x)$, ако полиномот $f(x)$ е делив со $(x-c)^k$, но не е делив со $(x-c)^{k+1}$.

Очигледно, ако c е k -кратна нула на полиномот $f(x)$, тој може да се запише во видот

$$f(x) \equiv (x-c)^k \cdot g(x) \quad (8)$$

каде што $g(x)$ е полином за кој $g(c) \neq 0$.

Ако $k=1$, тогаш велиме дека c е еднократна нула или проста нула на $f(x)$.

Пример 2

Да се утврди кратноста на нулата $x=2$ на полиномот

$$f(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8.$$

Решение. Според теорема 2, бидејќи $f(2)=0$, $f(x)$ е делив со $x-2$, односно $(x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8) : (x-2) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$, $q_4(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$, $f(x) = (x-2)q_4(x)$; $q_4(2)=0$, па значи $q_4(x)$ е делив со $x-2$. Понатаму, $(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4) : (x-2) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, $q_3(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, $f(x) = (x-2)^2 q_2(x)$. Бидејќи $q_4(x) = (x-2)q_3(x)$, $q_3(2)=0$ па значи $q_3(x)$ е делив со $x-2$. $(x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x-2) = x^2 + 1$, $q_2(x) = x^2 + 1$, $f(x) = (x-2)^3 q_2(x)$. Да забележиме дека последниот количник не е делив со $x-2$, бидејќи $q_2(2)=5$. Според тоа, полиномот $f(x)$ е делив со $(x-2)^3$, но не е делив со $(x-2)^4$. Значи $x=2$ е трикратен корен на $f(x)$: $f(x) = (x-2)^3(x^2 + 1)$.

**Задачи за самостојна работа**

1. Даден е полиномот $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$. Испитај кои од броевите: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, се негови нули.

2. Дадени се полиномите $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ и $g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$. Испитај кои од броевите $-1, 3, \frac{1}{2}$ се заеднички нули на полиномите $f(x)$ и $g(x)$.

3. Даден е полиномот $f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$. Испитај дали $x=-2$ е негова нула, и ако е, одреди ја нејзината кратност.

4. Испитај дали полиномот

$$f(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)(x-2) + 4(x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

е еднаков со полиномот $\varphi(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 15x + 5$.

4.6. Најголем заеднички делител на два полиноми

Евклидов алгоритам

Нека $f(x)$ и $g(x)$ се два произволни ненула полиноми со степени m и n соодветно. За полиномот $\phi(x)$ велиме дека е **заеднички делител** на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ ако тој е делител истовремено и на двата полиноми, т.е. ако $\phi(x)|f(x)$ и $\phi(x)|g(x)$. Согласно теорема 5 од 2.5. кон множеството на заедничките делители на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ следува да ги приклучиме и сите полиноми од нулти степен. Тоа значи дека секој $c \neq 0$ е заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$. Во општ случај, полиномите $f(x)$ и $g(x)$ можат (но не мора) да имаат и други заеднички делители што зависат од x , т.е. што не се од нулти степен.

Два полиноми, кои освен бројни делители, немаат други заеднички делители, се нарекуваат **заемно прости**.

Дефиниција 1. Најголем заеднички делител на два ненула полиноми $f(x)$ и $g(x)$ е оној којшто е делив со секој заеднички делител на $f(x)$ и $g(x)$.

Најголемиот заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ симболички го означуваме со $D(f, g)$ или со $d(x)$. Бидејќи $D(f, g)$ треба да е делив со кој било заеднички делител на $f(x)$ и $g(x)$, тој има највисок степен меѓу делителите. Ако полиномите $f(x)$ и $g(x)$ се заемно прости, тогаш $D(f, g)$ е од нулти степен, т.е. кој било константен број $c \neq 0$.

Горнава дефиниција го остава отворено прашањето: постои ли секогаш најголем и заеднички делител за кои било два полиноми?

На ова прашање потврден одговор дава следнава:

Теорема 1. За кои било два ненула полинома $f(x)$ и $g(x)$ постои најголем заеднички делител кој е определен со точност до множител од нулти степен.

Доказ. Нека се дадени полиномите $f(x)$ и $g(x)$ со степени n и m соодветно, при што $n \geq m$. Ако полиномот $f(x)$ е делив со $g(x)$, т.е. ако $g(x)|f(x)$, тогаш $D(f, g) = g(x)$. Ако, пак, при делењето на $f(x)$ се добие некој остаток $r_1(x) \neq 0$, тогаш полиномот $g(x)$ го делиме со $r_1(x)$ и ако добиеме нов остаток $r_2(x) \neq 0$, тогаш претходниот остаток $r_1(x)$ го делиме со $r_2(x)$ итн. Овој процес на делење после конечен број на делења мора да доведе до делење без остаток, бидејќи секој нареден остаток во низата остатоци $r_1(x), r_2(x), r_3(x), \dots$ е со понизок степен (барем за единица) од претходниот остаток.

Всушност, во тој процес ги добиваме следниве равенства:

$$f(x) \equiv g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$$

$$g(x) \equiv r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)$$

$$r_1(x) \equiv r_2(x) \cdot q_3(x) + r_3(x)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_{k-3}(x) \equiv r_{k-2}(x) \cdot q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x)$$

$$r_{k-2}(x) \equiv r_{k-1}(x) \cdot q_k(x) + r_k(x)$$

(1)

$$r_{k-1}(x) \equiv r_k(x) \cdot q_{k+1}(x).$$

Ќе докажеме дека последниот остаток $r_k(x) \equiv 0$ со кој е делив претходниот остаток $r_{k-1}(x)$, е најголемиот заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$, т.е. $D(f, g) = r_k(x)$.

Од последното равенство во (1) заклучуваме дека $r_k(x)$ е делител на $r_{k-1}(x)$, т.е. $r_k(x) | r_{k-1}(x)$. Оттука следува дека двата собирока на десната страна во претходното равенство од (1) се деливи со $r_k(x)$, па согласно последицата 1 од 4.5. и левата страна $r_{k-2}(x)$ на тоа равенство е делива со $r_k(x)$, т.е. $r_k(x) | r_{k-2}(x)$.

Аналогно од третото равенство одоздола:

$$r_{k-3}(x) \equiv r_{k-2}(x) \cdot q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x)$$

и од тоа што $r_k(x) | r_{k-2}(x)$ и $r_k(x) | r_{k-1}(x)$ следува дека $r_k(x) | r_{k-3}(x)$.

Продолжувајќи така нагоре во (1), ќе добиеме дека:

$$r_k(x) | r_{k-4}(x), \dots, r_k(x) | r_2(x), r_k(x) | r_1(x), r_k(x) | g(x) \text{ и } r_k(x) | f(x).$$

Значи, остатокот $r_k(x)$ е заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$.

Сега, нека $\phi(x)$ е произволен заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$, т.е. нека $\phi(x) | f(x)$ и $\phi(x) | g(x)$. Тогаш од првото равенство во (1) заклучуваме дека од $\phi(x) | f(x)$ и $\phi(x) | g(x)$ следува дека $\phi(x) | r_1(x)$. Преминувајќи на второто и наредните равенства од (1) на ист начин добиваме дека $\phi(x)$ е делител на остатоците $r_2(x), r_3(x), \dots, r_{k-2}(x), r_{k-1}(x)$ и $r_k(x)$.

Значи, $\phi(x) | r_k(x)$, односно $r_k(x)$ е делив со $\phi(x)$. Според тоа, $r_k(x)$, всушност, е најголем заеднички делител на $f(x)$ и $g(x)$. Останува уште да докажеме дека најголемиот заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ е определен со точност до множител од нулти степен.

Ако $d_1(x)$ и $d(x)$ се два најголеми заеднички делители на $f(x)$ и $g(x)$, тогаш согласно дефиницијата треба да важи $d_1(x) | d(x)$ и $d(x) | d_1(x)$, а оттука следува дека $d_1(x)$ и $d(x)$ се полиноми од ист степен и $d_1(x) = c \cdot d(x), c \neq 0$.

Постапката изложена во теорема 1 за одредување на најголемиот заеднички делител на два полиноми е позната како **Евклидов алгоритам** за одредување на $D(f, g)$. Таа постапка покажува дека ако полиномите $f(x)$ и $g(x)$ се со рационални (или реални) коефициенти, тогаш и $D(f, g)$ ќе биде со рационални (или реални) коефициенти.

Од друга страна, пак, ако $d(x)$ е најголем заеднички делител на $f(x)$ и $g(x)$, тогаш за $D(f, g)$ може да се избере, исто така, и полиномот $c \cdot d(x)$, каде c е произволно избран број различен од нула. Имајќи го предвид тоа, може да прифатиме дека водечкиот коефициент на $d(x)$ е еднаков на 1. Користејќи го ова можеме да кажеме:

Два полиноми $f(x)$ и $g(x)$ се заемно прости ако и само ако нивниот најголем заеднички делител е еднаков на единица, т.е. $D(f, g) = 1$.

Пример 1 Да го одредиме најголемиот заеднички делител за полиномите:

$$f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 \text{ и } g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

Решение: Го делиме полиномот $f(x)$ со $g(x)$.

$$(x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1) : (x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1) = x + 3 = q_1(x)$$

$$\begin{array}{r} \pm x^5 \mp 2x^4 \mp x^3 \mp 2x^2 \pm x \\ \hline 3x^4 \quad -x^2 - 4x - 1 \\ \pm 3x^4 \mp 6x^3 \mp 3x^2 \mp 6x \pm 3 \\ \hline r_1(x) = 6x^3 + 2x^2 + 2x - 4. \end{array}$$

Сега полиномот $g(x)$ треба да го делиме со $r_1(x)$. Но, за да избегнеме дробни коефициенти во количникот, претходно полиномот $g(x)$ го множиме со 3, а остатокот $r_1(x)$ го скратуваме со 2, па потоа делиме:

$$(3x^4 - 6x^3 - 3x^2 - 6x + 3) : (3x^3 + x^2 + x - 2) = x$$

$$\begin{array}{r} \pm 3x^4 \pm x^3 \pm x^2 \mp 2x \\ \hline -7x^3 - 4x^2 - 4x + 3. \end{array}$$

Овој остаток го множиме со 3, а делителот со 7, па го продолжуваме делењето:

$$(-21x^3 - 12x^2 - 12x + 9) : (21x^3 + 7x^2 + 7x - 14) = -1$$

$$\begin{array}{r} \mp 21x^3 \mp 7x^2 \mp 7x \pm 14 \\ \hline r_2(x) = -5x^2 - 5x - 5. \end{array}$$

Така го добиваме и вториот остаток, кој по скратувањето со -5, ќе биде $r_2(x) = x^2 + x + 1$.

Потоа првиот остаток $r_1(x) = 3x^3 + x^2 + x - 2$ го делиме со вториот остаток $r_2(x) = x^2 + x + 1$, и добиваме:

$$(3x^3 + x^2 + x - 2) : (x^2 + x + 1) = 3x - 1$$

$$\begin{array}{r} \pm 3x^3 \pm 3x^2 \pm 3x \\ \hline -2x^2 - 2x - 2 \\ \mp 2x^2 \mp 2x \mp 2 \\ \hline r_3(x) = 0. \end{array}$$

Според тоа, $D(f, g) = r_2(x) = x^2 + x + 1$. Провери непосредно дека $D(f, g) \mid f(x)$ и $D(f, g) \mid g(x)$.



Задачи за самостојна работа

1. Одреди го најголемиот заеднички делител за полиномите:

а) $f(x) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12$ и $g(x) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$,

б) $A(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$ и $B(x) = x^5 - 6x^3 + 5x$,

2. Одреди го $D(f, g)$ за полиномите:

а) $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + x$, $g(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$,

б) $f(x) = x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$, $g(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 22x + 12$,

в) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$,

г) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$, $g(x) = x^4 - 4x^3 + 8x + 3$ $r_1(x)$.

4.7. Полиноми со цели и рационални коефициенти

Секој полином со цели коефициенти:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0) \quad (1)$$

има специфични својства што се гледа од

Теорема 1. Секоја цела нула на полиномот $f(x)$ со цели коефициенти е делител на слободниот член на тој полином.

Доказ: Нека $x = \alpha$ е цела нула на $f(x)$. Тогаш ќе важи: $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$, односно

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = (x - \alpha)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0), \quad (2)$$

каде што коефициентите на $q(x)$ се цели броеви, па и бројот b_0 е цел.

Согласно равенството (2), имаме: $a_0 = -\alpha \cdot b_0 = \alpha \cdot (-b_0)$.

Оттука следува дека целата нула на $f(x)$ е делител на неговиот слободен член a_0 .

Според тоа, согласно теорема 1, ако целобројниот полином $f(x)$ има цели нули, тогаш нив треба да ги бараме помеѓу сите можни делители (и позитивни и негативни) на слободниот член a_0 на $f(x)$. Испитувањето на сите делители на слободниот член a_0 во некои случаи (кога нивниот број е голем) претставува мачна работа. Но, постои начин во голема мера тие пресметувања да се упростат. Очигледно е дека броевите 1 и -1 се или не се нули на полиномот $f(x)$. Ги пресметуваме $f(1)$ и $f(-1)$ и воедно утврдуваме дали броевите 1 и -1 се нули на полиномот $f(x)$. Потоа, ако целиот број α е нула на $f(x)$, тогаш ќе важи равенството (2). Бидејќи сите коефициенти на количникот $q(x)$ се цели броеви, и количниците

$$\frac{f(1)}{1-\alpha} = q(1), \quad \frac{f(1)}{-1-\alpha} = q(-1) \quad \text{или} \quad \frac{f(1)}{\alpha-1} = -q(1), \quad \frac{f(-1)}{\alpha+1} = -q(-1) \quad (3)$$

мора да бидат цели броеви. Според тоа, од сите делители на слободниот член a_0 за да провериме дали се нули на полиномот $f(x)$, вршиме испитување само на оние делители α за кои количниците (3) се цели броеви.

Пример 1 Да ги одредиме целите нули (ако има такви) на полиномот

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6.$$

Решение. Делители на слободниот член 6 на $f(x)$ се: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Бидејќи $f(1) = 1 - 2 - 5 + 4 + 6 = 4$, $f(-1) = 1 + 2 - 5 - 4 + 6 = 0$ заклучуваме дека бројот 1 не е нула, а бројот -1 е нула на полиномот. Потоа броевите $\frac{4}{1+2}, \frac{4}{1-6}$ и $\frac{4}{1+6}$ не се цели броеви, па затоа делителите -2, 6 и -6 ги отфрламе од натамошното испитување. А бидејќи количниците $\frac{4}{1-2}, \frac{0}{-1-2}, \frac{4}{1-3}, \frac{0}{-1-3}, \frac{4}{1+3}, \frac{0}{-1+3}$ се цели броеви, за секој од останатите делители 2, 3 и -3 вршиме натамошно испитување со пресметување на $f(2) \neq 0$, $f(3) = 0$ и $f(-3) \neq 0$. Според тоа, $f(x) = (x-3)(x+1)(x^2-2)$.

Ако сите коефициенти на полиномот $f(x)$ не се цели броеви, туку меѓу нив има и дробки, тогаш полиномот го множиме со најмалиот заеднички именител s на дробните коефициенти, па ќе добиеме полином $sf(x)$ со цели коефициенти, којшто има исти нули

како и полиномот $f(x)$. Според тоа, за да ги одредиме целите нули на $f(x)$, доволно е да ги одредиме целите нули на $sf(x)$.

Пример 2 Најди ги целите нули на полиномот $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$.

Решение. За $f(x)$ е $s = 4$. Го множиме полиномот $f(x)$ со 4, па добиваме:

$$4f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6.$$

Делители на слободниот член, -6 , се: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ и ± 6 . За делителите 1 и -1 со директна замена добиваме: $4f(1) = 1 + 2 - 4 - 5 - 6 = -12$, $4f(-1) = 1 - 2 - 4 + 5 - 6 = -6$.

Лесно се уверуваме дека за делителите $2, -2$ и 3 количниците (3) се цели броеви, а за $3, 6$ и -6 тие се дробки.

Така на пример, за $\alpha = 6$ количникот $\frac{4f(1)}{1-\alpha} = \frac{-12}{1-6} = \frac{-12}{-5}$ не е цел број. Значи, натамошното испитување дали се нули на $4f(x)$ го вршиме само за делителите: $2, -2$ и 3 , односно со пресметување на $4f(2) = 0$, $4f(-2) = -12$, $4f(3) = 78$ и $f(-3) = 0$.

Значи, делителите 2 и -3 се нули на $4f(x)$, па добиваме:

$4f(x) = (x-2)(x+3)(x^2+x+1)$, т.е. полиномот $4f(x)$ има само две цели нули $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = -3$.

Сега да преминеме на прашањето за одредување на рационалните нули на полином со цели коефициенти. Следнава теорема е од корист.

Теорема 2.

Ако полиномот (1) со цели коефициенти има рационална нула $\frac{p}{q}$, каде што p и q се заемно прости, тогаш p е делител на слободниот член a_0 , а q е делител на водечкиот коефициент a_n на полиномот $f(x)$.

Доказ. Ако $x = \frac{p}{q}$ е нула на $f(x)$, тогаш со негова замена во $f(x)$ и множење со q^n , добиваме:

$$a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + a_{n-2} q^2 p^{n-2} + \dots + a_1 q^{n-1} p + a_0 q^n = 0 \quad (4)$$

Оттука

$$a_0 q^n = p(-a_n p^{n-1} - a_{n-1} q p^{n-2} - a_{n-2} q^2 p^{n-3} - \dots - a_1 q^{n-1}) \quad (5)$$

Бидејќи $p, q, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ се цели броеви, изразот во заградата на десната страна во (5) е цел број. Од равенството (5) следува дека производот $a_0 q^n$ е делив со p , а бидејќи p и q се заемно прости, следува дека p е делител на a_0 .

Равенството (4) да го запишеме во видот:

$$a_n p^n = q(-a_{n-1} p^{n-1} - a_{n-2} q p^{n-2} - \dots - a_1 q^{n-2} p - a_0 q^{n-1}) \quad (6)$$

Оттука следува дека производот $a_n p^n$ е делив со q , но бидејќи p и q се заемно прости, следува дека q е делител на a_n . Со тоа теоремата е докажана. Од неа следува:

Теорема 3.

Секоја рационална нула на полиномот $f(x)$ со цели коефициенти и со водечки коефициент $a_n = 1$, е цел број.

Ако $a_n = 1$, согласно теоремата 2, q е делител на a_n , па мора да е $q = \pm 1$. Според тоа, рационалната нула $\frac{p}{q}$ е цел број.

Теоремата 1 укажува дека за наоѓањето на сите рационални (дробни и цели) нули на целоброен полином $f(x)$, чиј водечки коефициент е $a_n \neq 1$, треба тој да се трансформира во целоброен полином со водечки коефициент еднаков на единица. Тоа го постигнуваме на следниот начин:

Полиномот $f(x)$ го множиме со a_n^{n-1} и добиваме полином $a_n^{n-1}f(x)$ што ги има истите нули како и дадениот полином $f(x)$,

$$a_n^{n-1}f(x) = a_n^n x^n + a_{n-1} a_n^{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 a_n^{n-1} x + a_n^{n-1} a_0 \quad (7)$$

односно

$$a_n^{n-1}f(x) = (a_n x)^n + a_{n-1} (a_n x)^{n-1} + \dots + a_n^{n-2} a_1 (a_n x) + a_n^{n-1} a_0. \quad (8)$$

Потоа во (8) изразот $a_n x$ го заменуваме со нов аргумент $y = a_n x$, па полиномот $a_n^{n-1}f(x)$ го добива видот:

$$a_n^{n-1}f(x) = \varphi(y) = y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_n^{n-2} a_1 y + a_n^{n-1} a_0. \quad (9)$$

Согласно теоремата 3, сите рационални нули на полиномот (9) се цели броеви.

Кога ќе ги одредиме сите цели нули на полиномот (9), со помош на равенството $x = \frac{y}{a_n}$ ќе ги одредиме и сите рационални нули на полиномот $f(x)$.

Пример 3 Најди ги рационалните нули на полиномот $f(x) = 3x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 15x + 6$.

Решение. Го множиме полиномот $f(x)$ со $3^3 (= a_4^3)$:

$$3^3 f(x) = 3^3 \cdot 3x^4 - 5 \cdot 3^3 x^3 - 11 \cdot 3^3 x^2 + 15 \cdot 3^3 x + 3^3 \cdot 6$$

$$3^3 f(x) = (3x)^4 - 5 \cdot (3x)^3 - 33 \cdot (3x)^2 + 135(3x) + 162$$

$$3^3 f(x) = \varphi(y) = y^4 - 5y^3 - 33y^2 + 135y + 162,$$

каде што $y = 3x$. Потоа проверуваме дали 1 и -1 се нули на полиномот $\varphi(y)$:

$$\varphi(1) = 1 - 5 - 33 + 135 + 162 = 260, \quad \varphi(-1) = 1 + 5 - 33 - 135 + 162 = 0.$$

Значи, -1 е нула на $\varphi(y)$.

Од $162 = 2 \cdot 3^4$ заклучуваме дека делители на 162 покрај ± 1 се $\pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$ и др.

Проверуваме дека за $\alpha = \pm 2$ и $\alpha = \pm 3$ количниците $\frac{\varphi(1)}{\alpha-1}, \frac{\varphi(-1)}{\alpha+1}$ се дробки, според

тоа, тие не се цели нули на $\varphi(x)$, а за $\alpha = 6$: $\frac{\varphi(1)}{\alpha-1} = \frac{260}{6-1} = 52, \frac{\varphi(-1)}{\alpha+1} = \frac{0}{6+1} = 0$ се цели броеви. Со проверка, се добива $\varphi(6) = 0$.

Значи, $\varphi(y) = (y+1)(y-6)(y^2-27)$. Според тоа, полиномот $\varphi(y)$ има само две цели нули $y_1 = -1$ и $y_2 = 6$. Оттука, бараните рационални нули на дадениот полином $f(x)$ се:

$x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = 2$, и само тие.

Разложувањето на $f(x)$ на множители со цели коефициенти ќе гласи:

$$3^3 f(x) = (3x+1)(3x-6)(9x^2-27), \text{ од каде што } f(x) = (3x+1)(x-2)(x^2-3).$$

Да напомниме дека овој метод е применлив само за полиномите со цели коефициенти и тоа само за одредување на нивните рационални нули.

Теорема 4.

Ако за $x=0$ и $x=1$ полиномот $f(x)$ со цели коефициенти има непарни вредности, тогаш тој полином нема цели нули.

Доказ. Да го претпоставиме спротивното: Нека $x=\alpha$ е цела нула на $f(x)$ т.е. нека $f(\alpha)=0$, и нека $f(0)$ и $f(1)$ се непарни броеви.

Очигледно е дека количникот $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ при непарен броител $f(1)$ може да биде цел број само ако α е парен број. Од $f(\alpha)=0$, односно од $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, добиваме $a_0 = -\alpha(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \dots + a_1)$.

Според тоа, слободниот член a_0 е парен број (бидејќи α е парен број). Од друга страна, пак, $f(0)=a_0$ по услов е непарен број. Оваа противречност ја докажува теоремата.

Пример 4 Полиномот $f(x)=2x^5-3x^4+4x^2-x+5$ прима непарни вредности за $x=0$ и $x=1$: $f(0)=5$ и $f(1)=2-3+4-1+5=7$. Значи, тој нема цели нули.

За еден реален број α велиме дека е алгебарски број, ако тој се јавува како нула на некој полином со цели (или рационални) коефициенти. Такви се, на пример, сите рационални броеви, бидејќи се јавуваат како решенија на линеарни равенки со цели коефициенти. На пример, бројот $\sqrt[3]{2}$ е алгебарски, бидејќи се јавува како нула на полиномот x^3-2 . Со тоа не се исцрпени сите алгебарски броеви, бидејќи тоа множество е многу пошироко. Реалните броеви, кои не се алгебарски, т.е. не се нули на некој полином со цели, односно рационални коефициенти, се нарекуваат трансцендентни броеви. Такви се, на пример, броевите π , $\sqrt{\pi}$, $\sin 5$, $\log_{10} 3$ и многу други.



Задачи за самостојна работа

1. Одреди ги целите нули на полиномот, ако има такви

а) $x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12$,

б) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$.

2. Одреди ги рационалните нули на полиномите:

а) $4x^3 - 7x^2 - x + 3$,

б) $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$.

3. Разложи ги следниве полиноми на неразложливи множители:

а) $f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$,

б) $g(x) = x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6$,

в) $\varphi(x) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12$.

4. Докажи дека ако f е полином со цели коефициенти, тогаш за произволни различни цели броеви x и y , разликата $f(y)-f(x)$ е делива со $x-y$.

5. Користејќи ја претходната задача, докажи дека не постои полином f со цели коефициенти, така што $f(a)=b$, $f(b)=c$ и $f(c)=a$, за некои три различни цели броеви a, b и c .

4.8. Метод на неопределени коефициенти.

Основна теорема на алгебрата

При операциите со полиноми и трансформациите на полиномите од еден во друг вид, многупати се служиме со таканаречениот **метод на неопределени коефициенти**. Обично го применуваме во случаите кога сакаме даден израз да трансформираме во друг идентичен израз од определен вид, со коефициенти што треба да се определат.

Бараните коефициенти ги означуваме со букви и ги третираме како непознати. Потоа, користејќи го условот дека дадениот и трансформираниот израз треба да се идентични, даваме произволно избрани вредности на аргументот (променливата) и добиените вредности на двата изрази ги споредуваме. Така добиваме одреден број равенки по бараните коефициенти како непознати. Ако се работи за полиноми, тогаш равенките по бараните непознати коефициенти ги добиваме со споредување на соодветните коефициенти на дадениот и трансформираниот полином. Како тоа го остваруваме во практика ќе покажеме на следниве неколку примери.

Пример 1 Трансформирај го во вид на стандарден полином производот $(x+3)(x-2)(x+4)$.

Решение. Очигледно е дека дадениот производ е полином од трет степен, чиј коефициент пред водечкиот член е еднаков на 1, а слободниот член е еднаков на -24 . Значи, треба да важи идентитетот $(x+3)(x-2)(x+4) \equiv x^3 + ax^2 + bx - 24$.

За одредување на коефициентите a и b , згодено е за аргументот x да ги избереме вредностите $x = -3$ и $x = 2$. Притоа ги добиваме равенките $9a - 3b - 51 = 0$ и $4a + 2b - 16 = 0$, со бараните коефициенти a и b во улога на непознатите. Кога ќе го решиме добиениот систем равенки:
$$\begin{cases} 3a - b = 17 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$$
 наоѓаме: $a = 5, b = -2$.

Според тоа, $(x+3)(x-2)(x+4) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$.

Забелешка: Со непосредно множење може да се провери резултатот.

Пример 2 Подели го полиномот $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 1$ со $g(x) = 2x^2 + x - 1$.

Решение. Во нашиот случај бараниот количник $q(x)$ ќе биде полином од втор степен, што со помош на неопределени коефициенти го запишуваме $q(x) = ax^2 + bx + c$. Остатокот $r(x)$ ќе биде од прв степен, па според тоа ќе го има видот $r(x) = dx + e$. Тогаш имаме:

$$2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 1 \equiv (2x^2 + x - 1)(ax^2 + bx + c) + dx + e \text{ или}$$

$$2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 1 \equiv 2ax^4 + (a + 2b)x^3 + (2c + b - a)x^2 + (d + c - b)x + e - c.$$

Значи, согласно со теорема од 2.1

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ a + 2b = -3 \\ 2c + b - a = 3, \text{ оттука} \\ d + c - b = 8 \\ e - c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \\ d = 3 \\ e = 2 \end{cases}$$

Според тоа: $q(x) = x^2 - 2x + 3$ и $r(x) = 3x + 2$.

Пример 3 Со методот на неопределени коефициенти избири полиноми $A(x)$ и $B(x)$, такви што да важи: $f(x) \cdot A(x) + g(x) \cdot B(x) = 1$, за $f(x) = x^3$, $g(x) = (x-1)^2$ и степенот на $A(x)$ е најмногу 1.

Решение. Ако степенот на полиномот $A(x)$ е најмногу 1, тогаш степенот на полиномот $B(x)$ е најмногу 2. Затоа нека $A(x) = ax + b$ и $B(x) = cx^2 + dx + e$.

Од равенството $x^3(ax + b) + (x-1)^2(cx^2 + dx + e) = 1$, кое по ослободување од заградите и подредување на левата страна по степените на x ,

$(a+c)x^4 + (b-2c+d)x^3 + (c-2d+e)x^2 + (d-2e)x + e = 1$, добиваме дека

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b-2c+d=0 \\ c-2d+e=0, \text{ оттука} \\ d-2e=0 \\ e=1 \end{cases} \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \\ c=3 \\ d=2 \\ e=1 \end{cases}$$

Според тоа, $A(x) = -3x + 4$, $B(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

Од равенството $(x-1)(x+3)(x+4) = x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 2x - 24$ гледаме дека полиномот $f(x) = x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 2x - 24$ од четврти степен има точно четири нули. Меѓутоа, се поставува прашањето: дали секој полином од четврти или друг степен има воопшто барем една нула? Тоа е прашање што треба поопстојно да се разгледа. На пример, полиномот $x^4 + 1$ во полето на реалните броеви нема ниту една нула, бидејќи за кој било (позитивен или негативен) реален број $x = x_0 \in x_0^4 \geq 0$, а збирот $x_0^4 + 1 \geq 1$, т.е. секогаш е позитивен реален број. Тоа не значи, пак, дека полиномот $x^4 + 1$ и во полето на комплексните броеви нема нули. Полиномите од нулти степен (освен нула полиномот), воопшто не се анулираат, а за полиномите од прв и втор степен знаеме дека имаат нули.

Одговор на прашањето за егзистенција на нули на полиномот го дава следнава:

Основна теорема на алгебрата

Секој полином од степен $n \geq 1$, со коефициенти во полето на комплексните броеви има барем една нула, во општ случај комплексна.

Оваа теорема е една од најважните во математиката и претставува основа на теоријата на полиноми со бројни коефициенти. Затоа таа се вика **Основна теорема на алгебрата**, или **Гаусова теорема** по името на германскиот математичар К. Ф. Гаус (1777-1852), кој прв ја докажал во својата докторска дисертација кога имал 22 години, а покасно предложил уште три докази.

Основната теорема на алгебрата гарантира постоење на барем една (комплексна) нула c_1 на даден полином f со степен $n \geq 1$. Ако дадениот полином го поделиме со $x - c_1$, добиваме полином g со степен за единица помал од степенот на f . Според Основната теорема на алгебрата и полиномот g има барем една (комплексна) нула c_2 која, исто така, ќе биде и нула и на дадениот полином f . Делејќи го полиномот g со $x - c_2$ добиваме полином со степен за единица помал од степенот на g . Оваа постапка ја продолжуваме сè додека не добиеме полином од прв степен $ax + b$, $a \neq 0$, кој го запишуваме како $a(x - c_n)$, каде $c_n = -\frac{b}{a}$. Со тоа го добиваме разложувањето

$$f(x) = (x - c_1)g(x) = (x - c_1)(x - c_2)h(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)a$$

Јасно е дека бројот a е всушност водечкиот коефициент на полиномот. Меѓу броевите $c_1, c_2, \dots, c_n$ може да има и еднакви. Нека, на пример, само p корени се реални, и тоа, $c_{i_1} = \alpha_1$ е k_1 -кратна нула, $c_{i_2} = \alpha_2$ е k_2 -кратна нула, ..., $c_{i_p} = \alpha_p$ е k_p -кратна нула, така што $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$. Тогаш полиномот се запишува во форма

$$f(x) = a(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_p)^{k_p}, \quad (k_1 + k_2 + \dots + k_p = n) \quad (1)$$

Притоа претставувањето на полиномот во овој облик е еднозначно, со точност до редоследот на множителите. Имено, ако стартуваме на пример со α_2 како прва нула на полиномот, ќе добиеме разложување од облик $f(x) = a(x - \alpha_2)^{p_2} \dots (x - \alpha_1)^{p_1}$, кое се разликува од почетното само по редоследот на множителите. Значи важи следнава:

Теорема 2. Секој полином на единствен начин (со точност до редоследот на множителите) се разложува во обликот (1), каде $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ се различни комплексни корени на полиномот.

Комплетното разложување на полиномите на множители во пракса не е секогаш лесно изводливо, посебно за полиноми со повисоки степени, така што често пати е неопходно користење на компјутер за таа цел.

Пример 4 Докажи дека $x_1 = i$ и $x_2 = -i$ се нули на полиномот $P(x) = x^6 + 1$, а потоа истиот разложи го на линеарни множители во $\mathbb{C}$.

Решение: $P(i) = i^6 + 1 = i^{4+2} + 1 = 1 \cdot (-1) + 1 = 0$, $P(-i) = (-i)^6 + 1 = i^6 + 1 = -1 + 1 = 0$. Според тоа:

$$x^6 + 1 = (x - i)(x + i)(x^4 - x^2 + 1).$$

Полиномот $x^4 - x^2 + 1 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ се разложува како

$$\left(x^2 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Сега не е тешко да се добијат разложувањата:

$$\left(x^2 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \text{ и } x^2 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right).$$

Дефинитивно,

$$x^6 + 1 = (x - i)(x + i)\left(x - \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right).$$



Задачи за самостојна работа

1. Одреди ги коефициентите m и n така што полиномот $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + mx + n$ да биде делив со $q(x) = x^2 - 3x + 2$.

2. Одреди ги коефициентите a и b на полиномот $x^3 - 2x^2 + ax + b$, така што тој да биде делив со $x - 1$, а при делење со $x - 2$ да се добие остаток 4.

3. При кои услови полиномот $x^3 + ax + b$ ќе биде делив со полиномот $x^2 + cx - 1$?

4. Определи ги коефициентите a и b така што триномот $ax^4 + bx^3 + 1$ да биде делив со $(x-1)^2$.

4.9. Врска меѓу нулите на полиномот и коефициентите пред променливите

За даден полином од n -ти степен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

веќе знаеме дека тој може да се претстави и како производ од n линеарни множители во полето $\mathbb{C}$:

$$P(x) = a_n (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_{n-1})(x - c_n) \quad (2)$$

каде што $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n$ се неговите n нули (реални или комплексни), а меѓу нив може да има и еднакви.

Да го извршиме множењето на биномите во (2) кои се разликуваат само по вторите членови, не земајќи го предвид коефициентот a_n (или сметајќи дека е $a_n = 1$).

Прво ќе го одредиме производот на првите два множители:

$$p_2 = (x - c_1)(x - c_2) = x^2 - (c_1 + c_2)x + c_1 c_2, \text{ потоа}$$

$$p_3 = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) = x^3 - (c_1 + c_2 + c_3)x^2 + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)x - c_1 c_2 c_3,$$

$$p_4 = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4) = x^4 - (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)x^3 + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_1 c_4 + c_2 c_3 + c_2 c_4 + c_3 c_4)x^2 - (c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2 c_4 + c_1 c_3 c_4 + c_2 c_3 c_4)x + c_1 c_2 c_3 c_4.$$

Множејќи и понатаму на тој начин, ќе го добиеме и производот

$$p_n = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) = x^n - (c_1 + c_2 + \dots + c_n)x^{n-1} + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n)x^{n-2} - (c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2 c_4 + \dots + c_{n-2} c_{n-1} c_n)x^{n-3} + \dots + (-1)^k (c_1 c_2 \dots c_k + c_1 c_2 \dots c_{k-1} c_{k+1} + \dots) x^k + \dots + (-1)^n c_1 c_2 \dots c_n. \quad (3)$$

Ако полиномот p_n го помножиме со a_n , согласно (2) добиваме полином идентичен со $P(x)$, т.е. $a_n p_n(x) = P(x)$, односно

$$\begin{aligned} a_n x^n - a_n (c_1 + c_2 + \dots + c_n) x^{n-1} + a_n (c_1 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n) x^{n-2} - \\ - a_n (c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2 c_4 + \dots + c_{n-2} c_{n-1} c_n) x^{n-3} + \dots + \\ + (-1)^k a_n (c_1 c_2 \dots c_k + c_1 c_2 \dots c_{k-1} c_{k+1} + \dots) x^k + \dots + \\ + (-1)^n a_n c_1 c_2 \dots c_n \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Со споредување на коефициентите пред еднаквите степени на x во левата и десната страна на идентитетот (4) ги добиваме равенствата:

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$c_1 c_2 + c_2 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

.....

$$c_1 c_2 \dots c_{n-1} + c_1 c_2 \dots c_{n-2} c_n + \dots + c_2 c_3 \dots c_n = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n},$$

$$c_1 c_2 c_3 \dots c_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Забележуваме дека левата страна кај k -тото равенство ($k=1,2,3,\dots,n$) претставува збир од семожните производи од по k различни нули, земен со знак плус или минус, во зависност од парноста или непарноста на бројот k .

Вистовите формули можат да се користат за одредување на коефициентите на полиномот, ако се познати неговите нули.

Пример 1 Најди полином од четврти степен $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, кој има прости нули 2 и -5 и една двократна нула 3.

Решение. Нули на бараниот полином се: $x_1=2, x_2=-5, x_3=3, x_4=3$, а a_0 нека е 1.

Формално, $P(x) = (x-2)(x+5)(x-3)^2$. Користејќи ги равенствата (5) за $n = 4$ добиваме:

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -10 + 6 + 6 - 15 - 15 + 9 = -19$$

$$a_3 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) = -(-30 - 30 + 18 - 45) = 87$$

$$a_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 = -90.$$

Според тоа, бараниот полином е $P(x) = x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 87x - 90$.

Задачата може да се реши и директно со пресметување на производот

$$P(x) = (x - 2)(x + 5)(x - 3)(x - 3).$$

Со користење на следнава табела

5	1	-2			
-3	1	3	-10		
-3	1	0	-19	30	
	1	-3	-19	87	-90

добиваме дека $a_1 = -3, a_2 = -19, a_3 = 87, a_4 = -90$, т.е.

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 87x - 90.$$

Пример 2 Пресметај го збирот од квадратите на нулите на полиномот

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3.$$

Решение: Нека x_1, x_2 и x_3 се нули на дадениот полином. Според Виетовите правила (5) имаме:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 1. \\ x_1 x_2 x_3 = 3 \end{cases} \quad (6)$$

Од идентитетот $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ и равенствата (6), добиваме

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2^2 - 2 \cdot 1 = 2.$$



Задачи за самостојна работа

1. Формирај полином од четврти степен, чии корени се: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.
2. Напиши ги Виетовите формули за полиномот $x^3 + ax + b$ и одреди ги неговите нули, ако една од нив е двократна.
3. Одреди ги коефициентите a и b на полиномот $P(x) = ax^4 + bx^2 + 1$, ако се знае дека има двократна нула $x = 1$.

4.10. Полиноми со реални коефициенти

Нека е даден полином f со реални коефициенти. Знаеме дека него можеме да го запишеме во обликот

$$f(x) = a(x - \alpha_1)^{p_1} (x - \alpha_2)^{p_2} \dots (x - \alpha_p)^{p_k}, \quad (p_1 + p_2 + \dots + p_k = n),$$

каде во општ случај $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ се комплексни нули. Се поставува прашањето: како да се разложи полином со реални коефициенти на полиноми кои, исто така, ќе бидат со реални коефициенти. За таа цел најпрво ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 1. Ако комплексниот број α е нула на полиномот $f(x)$ со реални коефициенти, тогаш и неговиот конјугиран број $\bar{\alpha}$ е, исто така, нула на полиномот.

Доказ. Нека $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, каде $a_0, a_1, \dots, a_n$ се реални броеви. Ако α е нула на полиномот $f(x)$, тогаш

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Ако двете страни на ова равенство се конјугираат и притоа се искористи дека $(\overline{\alpha^k}) = (\bar{\alpha})^k$, како и фактот дека $\overline{a_k} = a_k$, добиваме

$$a_0(\bar{\alpha})^n + a_1(\bar{\alpha})^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad \text{т.е. } f(\bar{\alpha}) = 0, \text{ и со тоа теорема га е докажана.}$$

Ако нулата α во теорема 1 е реален број, тогаш теорема 1, всушност, ништо не тврди. Меѓутоа, ако α е комплексен, но не е реален број, во тој случај ако сме ја нашле нулата α , ние, всушност, сме нашле две различни нули: α и $\bar{\alpha}$. Полиномот можеме да го поделиме со $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ и со тоа проблемот на разложување сме го доведе до разложување на полином со степен помал за 2. Освен тоа, бидејќи $-p = \alpha + \bar{\alpha}$ и $q = \alpha\bar{\alpha}$ се реални броеви, добиваме дека полиномот $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 + px + q$ е, исто така, со реални коефициенти, па и количникот на полиномот $f(x)$ со овој тринот е исто така, полином со реални коефициенти. Сега повторно може да се примени теоремата 1. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме дека нулите на полиномот $f(x)$ се состојат од

реални броеви и парови заемно конјугирани комплексни броеви. Освен тоа, горната постапка на одвојување на ссој пар заемно конјугирани комплексни броеви укажува на тоа дека кратноста на α мора да е еднаква на кратноста на $\bar{\alpha}$. Од оваа дискусија произлегува точноста на следнава теорема.

Теорема 2.

Нулите на еден полином со реални коефициенти можат да бидат реални броеви и парови заемно конјугирани броеви со иста кратност.

Ако кратноста на нулите α и $\bar{\alpha}$ е k , тогаш

$$(x - \alpha)^k (x - \bar{\alpha})^k = [(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})]^k = (x^2 + px + q)^k,$$

и освен тоа $p^2 - 4q < 0$, бидејќи во спротивно нулите на триномот $x^2 + px + q$ ќе бидат реални. Од оваа дискусија произлегува и следната теорема за разложувањето на полиноми со реални коефициенти на множители.

Теорема 3.

Секој полином f со реални коефициенти и со степен n , на единствен начин со точност до редоследот на множителите, може да се запише во следниот облик

$$f(x) = a(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_s)^{k_s} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_tx + q_t)^{m_t},$$

каде $a, a_1, \dots, a_s, p_1, \dots, p_t, q_1, \dots, q_t$ се реални броеви при што $a_1, \dots, a_s$ се различни реални нули, паровите $(p_1, q_1), \dots, (p_t, q_t)$ се различни и $p_1^2 < 4q_1, \dots, p_t^2 < 4q_t$, а $k_1, \dots, k_s, m_1, \dots, m_t$ се природни броеви и за нив важи $k_1 + \dots + k_s + 2(m_1 + \dots + m_t) = n$.

Пример 1 Разложи го полиномот $x^7 + x^6 + x + 1$ на реални множители.

Решение. Забележуваме дека $x^7 + x^6 + x + 1 = (x + 1)(x^6 + 1)$. Знаеме дека

$$x^6 + 1 = (x - i)(x + i) \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right),$$

па со групирање на паровите комплексно конјугирани нули добиваме:

$$x^7 + x^6 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1).$$

Пример 2 Разложи го полиномот $x^8 + 8x^4 + 16$ на реални множители.

$$x^8 + 8x^4 + 16 = (x^4 + 4)^2.$$

Решение. Забележуваме дека $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ и овие два множителя се понатаму неразложливи. Затоа,

$$x^8 + 8x^4 + 16 = (x^2 - 2x + 2)^2 (x^2 + 2x + 2)^2.$$



Задачи за самостојна работа

1. Најди полином со најмала можна степен со водечки коефициент 2, таков што броевите а) $2+i$ и $1-2i$, б) $1+i$ и $-1-i$, се негови нули.

2. Најди полином со најмала можна степен со водечки коефициент 1, за кој бројот $2i$ е нула со кратност 3, а 0 е корен со кратност 2.

3. Разложи ги на реални множители следниве полиноми:

а) $x^5 + 3x^3 + 2x$,

б) $x^{11} + 3x^9 + 3x^7 + x^5$.

4.11. Дробно рационални изрази со една променлива

Познато е дека рационалните изрази можат да бидат **цели рационални** или **дробно рационални**. Целите рационални изрази со барем една променлива ги нарекуваме полиноми.

Рационалниот израз се вика дробен ако содржи операција делење со израз што содржи променлива. На пример, изразите:

$$\frac{2x}{x^2+1}, \frac{3}{x^2-1}, 2x - \frac{x^2}{x-1}, x^2 + 2y + \frac{1}{x-y} - \frac{2x}{y+1},$$
 се дробни рационални изрази и тоа

првите три се со една променлива, а четвртиот - со две променливи.

Ако променливите добиваат одредени бројни вредности, тогаш рационалниот израз, по правило, ќе добива некои точно определени вредности. Исклучок претставуваат случаите кога при пресметувањата би се дошло до делење со нула, кое не

е можно, т.е. нема смисла. Затоа, изразите, како што се: $\frac{x+1}{x-x}, \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2-x^2-2xy-y^2}$ не

ги сметаме за рационални изрази, бидејќи тие немаат бројни вредности за ниедна вредност на променливите.

Во продолжение ќе се задржиме на рационалните (цели и дробни) изрази само со една променлива.

Дефиниција 1.

Количникот од два полиноми $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, каде што $g(x)$ е ненула полином ($g(x) \neq 0$) се вика рационална или алгебарска дробка.

$$\text{Рационалната дробка } \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (1)$$

во зависност од полиномот - броител $f(x)$ и полиномот именител $g(x)$, може да е со рационални, реални или комплексни коефициенти, а да биде разгледувана во различни бројни полиња, во зависност од тоа од кое бројно поле добиваат вредности променливата x и рационалната дробка (1).

Дефиниционата област (домен) на рационалната дробка (1) е множеството на сите реални (односно комплексни) броеви, освен нулите на полиномот именител $g(x)$. На

пример, дефинициона област на рационалната дробка $\frac{x-1}{x^2+1}$ разгледувана во полето на рационални (или реални) броеви е множеството на сите рационални (реални) броеви. Доменот, пак, на истата дробка во полето на комплексните броеви е множеството на сите комплексни броеви, освен броевите $-i$ и i , кои се нули на полиномот x^2+1 во $\mathbb{C}$, т.е. $D = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

Ќе покажеме дека алгебарските операции и сите други трансформации над рационалните дробки ги вршime согласно истите закони како и над рационалните броеви, т.е. како и над обичните дробки со броител и именител - цели броеви. Исто така, и равенство на две рационални дробки ќе дефинираме како равенство на две дробки во аритметиката. На пример:

За две обични дробки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, каде што $a, b \neq 0, c, d \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, важи еквиваленцијата: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. (2)

Аналогно усвојуваме: за две рационални дробки $\frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0)$ и $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} (\psi(x) \neq 0)$ важи еквиваленцијата: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \psi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$. (3)

Теорема 1. Ако полиномите броител и именител на рационалната дробка (1) имаат заеднички неконстантен делител $\lambda(x) \neq 0$, тогаш делејќи ги нив со тој делител ќе добиеме дробка, еднаква со дадената, т.е. $\frac{\lambda(x) \cdot f(x)}{\lambda(x) \cdot g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}, \lambda(x) \neq 0$ (4)

Доказ. Рационалните дробки од двете страни на равенството (4) се еднакви, бидејќи тие го задоволуваат потребниот услов (3), т.е. важи:

$$(\lambda(x) \cdot f(x)) \cdot g(x) = (\lambda(x) \cdot g(x)) \cdot f(x)$$

Трансформацијата (4) се вика **скратување** на рационалната дробка $\frac{\lambda(x) \cdot f(x)}{\lambda(x) \cdot g(x)}$, а обратната операција- **проширување на рационалната дробка** $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Забележуваме дека скратувањето на дробка може да ја прошири (измени) нејзината дефинициона област. Имено: дефиниционата област на дробката $\frac{\lambda(x)f(x)}{\lambda(x)g(x)}$ ја одредуваме од два услови $\lambda(x) \neq 0, g(x) \neq 0$, а за дробката добиена по скратувањето, условот $\lambda(x) \neq 0$ отпаѓа.

Рационалната дробка (1) се вика **нескратлива** ако нејзиниот броител и именител се заемно прости полиноми, т.е. ако тие (освен бројни) немаат други заеднички делители. Очигледно е дека секоја рационална дробка ако се скрати со најголемиот заеднички делител на нејзиниот броител и именител, ќе се добие дробка која е нескратлива дробка и се нарекува **претставување на дробка во канонична форма**.

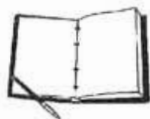
Пример 1 Претстави ја во канонична форма рационалната дробка

$$\frac{\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1}{\frac{1}{6}x^2 - x + \frac{4}{3}}$$

Решение.
$$\frac{\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1}{\frac{1}{6}x^2 - x + \frac{4}{3}} = \frac{6\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1\right)}{6\left(\frac{1}{6}x^2 - x + \frac{4}{3}\right)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}.$$

Со равенството на дадена рационална дробка и на нејзината нескратлива, односно канонична форма, всушност, вршime извесна корекција на договорот за дефинициона област на рационална дробка. Имено, рационалната дробка ја дефинираме (осмислуваме) и за оние вредности на x што се нули и на броителот и на именителот,

чијашто кратност е иста. Со други зборови, ако рационалната дробка $\frac{f(x)}{g(x)}$ за $x = x_0$ нема смисла, но нејзината канонична форма, т.е. нескратливата дробка $\frac{p(x)}{q(x)}$ за $x = x_0$ има смисла и добива вредност $\frac{p(x_0)}{q(x_0)}$ ($q(x_0) \neq 0$), тогаш како вредност на $\frac{f(x)}{g(x)}$ за $x = x_0$ ја земаме вредноста $\frac{p(x_0)}{q(x_0)}$, т.е. ќе сметаме дека важи равенството: $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$.



Задачи за самостојна работа

1. Одреди ја дефиниционата област на рационалната дробка $\frac{x+2}{(x+3)(x^2+4)}$ во полето на:

а) реалните, б) комплексните броеви.

2. Рационалните дропки:

а) $\frac{x^2+1}{x^4-1}$,

б) $\frac{x^2+1+x}{x^3-1}$,

в) $\frac{x^4-x^2+1}{x^6+1}$

претстави ги во канонична форма.

3. Дропките:

а) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$,

б) $\frac{x^3+y^3}{x^4-y^4}$

доведи ги во канонична форма.

4.12. Трансформација на рационалните дропки во вид на збир од прости множители

Рационалната дробка $\frac{f(x)}{g(x)}$ се вика **права**, ако степенот на броителот $f(x)$ е помал од степенот на именителот $g(x)$. Ако, пак, степенот на броителот $f(x)$ не е помал од степенот на именителот, тогаш дробката се вика **неправа**.

Теорема 1.

Секоја неправна рационална дробка може да се претстави на единствен начин како збир од полином и права дробка.

Доказ. Нека $\frac{f(x)}{g(x)}$ е неправна дробка. Со делење на броителот $f(x)$ со именителот $g(x) \neq 0$ го добиваме равенството

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \text{ или } \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}. \quad (1)$$

каде што остатокот $r(x)$ има степен помал од степенот на именителот $g(x)$. Останува да ја докажеме единственоста на $q(x)$ и $\frac{r(x)}{g(x)}$.

Да претпоставиме дека постои и равенството

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q_1(x) + \frac{h(x)}{p(x)} \quad (2)$$

каде што степенот на $h(x)$ е помал од степенот на $p(x)$.

Од (1) и (2) следува равенството:

$$q(x) - q_1(x) = \frac{h(x)}{p(x)} - \frac{r(x)}{g(x)} = \frac{h(x) \cdot g(x) - p(x) \cdot r(x)}{p(x) \cdot g(x)}.$$

Бидејќи на левата страна е полином, а десната страна - права дробка, тоа е можно само ако

$$q(x) - q_1(x) = 0 \text{ и } \frac{h(x)}{p(x)} - \frac{r(x)}{g(x)} = 0,$$

од каде што добиваме дека: $q_1(x) = q(x)$ и $\frac{h(x)}{p(x)} = \frac{r(x)}{g(x)}$.

Пример 1 Трансформирај ја несправата рационална дробка $\frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 - x + 3}$.

Решение. $(x^3 + 2x + 5) : (x^2 - x + 3) = x + 1 + \frac{2}{x^2 - x + 3}$, значи

$$\frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 - x + 3} = (x + 1) + \frac{2}{x^2 - x + 3}.$$

Да се потсетиме, во полето на реалните броеви неразложливи се не само полиномите од прв степен $x - a$, туку и многу други полиноми, како полиномите од втор степен $x^2 + px + q$, каде што p и q се реални броеви, за кои $p^2 - 4q < 0$. Меѓутоа, во полето на комплексните броеви неразложливи се само полиномите од прв степен $x - \alpha$ каде што α е кој било комплексен број, согласно основната теорема на алгебрата.

Сега ќе воведеме посебен назив за еден специјален вид рационални дробки.

Права дробка од видот $\frac{A}{(x - a)^k}$ се вика **проста дробка од прв вид** ако A и a се дадени реални броеви, а k - даден природен број. **Проста дробка од втор вид**, пак, се вика секоја права дробка од видот $\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}$, каде што A, B, p и q се дадени реални броеви, а k - природен број, за кои $p^2 - 4q < 0$.

Правите рационални дробки го имаат следново важно својство:

Теорема 2. Секоја права рационална дробка може да се претстави како збир од прости дробки (од прв и втор вид).

Доказ. Нека $\frac{f(x)}{g(x)}$ е нескратлива рационална дробка со реални коефициенти, при што степенот на $f(x)$ е помал од степенот на $g(x)$. По однос на нулите на полиномот - именител $g(x)$ постојат неколку можности:

- а) сите нули на $g(x)$ се реални и различни;
- б) некои од реалните нули се повеќекратни;
- в) $g(x)$ има еднократни или повеќекратни комплексни нули.

Редоследно ќе ги докажеме наведните случаи:

а) Случај кога сите нули на именителот $g(x)$ се реални и различни.

Ако $x = a$ е една проста нула на именителот $g(x)$, тогаш

$$g(x) = (x - a) \cdot g_1(x), \text{ при што } g_1(a) \neq 0.$$

Ќе покажеме дека постојат реален број A и полином $f_1(x)$, чиј степен е помал од степенот на $g_1(x)$, за кој важи равенството:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (3)$$

Со множење на двете страни на (3) со $g(x) = ((x - a) \cdot g_1(x))$, добиваме

$$f(x) = A \cdot g_1(x) + (x - a)f_1(x) \quad (4)$$

$$\text{Ставајќи } x = a, \text{ имаме } f(a) = A \cdot g_1(a), \text{ а оттука } A = \frac{f(a)}{g_1(a)}, \quad (5)$$

Тоа значи дека $f(x) = A \cdot g_1(x)$ е делив со $x - a$, т.е. дека и $\frac{f(x) - A \cdot g_1(x)}{x - a}$ е, исто така, полином, а согласно (4) тој е токму бараниот полином

$$f_1(x) = \frac{f(x) - A \cdot g_1(x)}{x - a} \quad (6)$$

Очигледно е дека степенот на $f_1(x)$ е за единица помал од степенот на броителот $f(x) - A \cdot g_1(x)$. Меѓутоа степенот на $f(x)$ е помал од степенот на $g(x)$. Тоа својство го има и полиномот $A \cdot g_1(x)$. Значи, степенот на броителот - полиномот $f(x) - A \cdot g_1(x)$ е понизок од степенот на полиномот $g(x)$, па според тоа степенот на полиномот $f_1(x)$ е понизок од степенот на $g(x)$ за најмалку две единици.

Според тоа, полиномот $f_1(x)$ има степен помал од $g_1(x)$, а тоа значи дека $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ е права дробка. Со тоа го докажавме равенството (3).

Ако именителот $g_1(x)$ на правата дробка $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ има една проста нула $x = b$, тогаш

$g_1(x) = (x - b) \cdot g_2(x)$, па и за неа можеме да ја примениме истата постапка, и ќе добиеме:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{B}{x - b} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \quad (7)$$

каде што константата B и полиномот $f_2(x)$ ги одредуваме на ист начин како и A и $f_1(x)$.

Ако $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ од (7) ја замениме во (3), добиваме:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \quad (8)$$

Продолжувајќи на овој начин, после конечно многу постапки добиваме:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \dots + \frac{L}{x - t} \quad (9)$$

каде што $a, b, c, \dots, t$ се нули на именителот $g(x)$.

На секоја реална нула на именителот $g(x)$ одговара по еден собирок од видот $\frac{A}{x-a}$ и со тоа правата рационална дробка ја претставуваме како збир од прости дробки од прв вид.

Непознатите реални коефициенти во равенството (9) во практиката ги одредуваме со помош на познатиот метод на неопределени коефициенти.

Како правите нескратливи рационални дробки ги разложуваме во збир од прости дробки ќе покажеме на следниов пример.

Пример 2 Разложи ја во збир од прости дробки од прв вид правата рационална дробка

$$\frac{10x^3 - 3x^2 - 19x + 6}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

Решение. Прво именителот на дробката го разложуваме на неразложливи множители. За таа цел ги одредуваме рационалните нули на полиномот $x^4 - 5x^2 + 4$. Тоа се: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$. Според тоа, разложувањето на дадената дробка во збир од прости дробки ќе го има видот:

$$\frac{10x^3 - 3x^2 - 19x + 6}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}. \quad (10)$$

Оттука следува равенството:

$$10x^3 - 3x^2 - 19x + 6 \equiv A(x+1)(x-2)(x+2) + B(x-1)(x-2)(x+2) + C(x-1)(x+1)(x+2) + D(x-1)(x+1)(x-2) \quad (11)$$

односно

$$10x^3 - 3x^2 - 19x + 6 \equiv A(x^3 + x^2 - 4x - 4) + B(x^3 - x^2 - 4x + 4) + C(x^3 + 2x^2 - x - 2) + D(x^3 - 2x^2 - x + 2). \quad (11')$$

Според методот на неопределени коефициенти, броевите A, B, C и D од равенството (11), односно (11') ги одредуваме кога неговата десна страна прво ја подредиме по опаѓнувачките степени на x :

$$10x^3 - 3x^2 - 19x + 6 \equiv (A + B + C + D)x^3 + (A - B + 2C - 2D)x^2 + (-4A - 4B - C - D)x - 4A + 4B - 2C + 2D \quad (12)$$

а потоа ги изедначуваме соодветните коефициенти при еднаквите степени на x во двете страни на равенството (12). Така добиваме систем од услови - линеарни равенки во кои како непознати се јавуваат константите A, B, C и D :

$$\begin{cases} A + B + C + D = 10 \\ A - B + 2C - 2D = -3 \\ -4A - 4B - C - D = -19 \\ -4A + 4B - 2C + 2D = 6 \end{cases} \quad (13)$$

Системот линеарни равенки (13) има единствено решение: $A = 1, B = 2, C = 3$ и $D = 4$. Со замена на овие вредности во (10), добиваме:

$$\frac{10x^3 - 3x^2 - 19x + 6}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2}.$$

Во случај кога именителот $g(x)$ на правата рационална дробка $\frac{f(x)}{g(x)}$ има само различни реални нули, определувањето на непознатите константи $A, B, C, \dots, L$ во разложувањето (9) секогаш го вршме со помош на таканаречениот **метод на посебни вредности**, кој се состои во следново:

Равенството (11) сакаме да биде идентитет што значи дека треба да важи за секој реален број x . Оттука следува дека тоа мора да важи и за некои посебни избрани вредности на x . Во овој пример тоа се вредностите $x=1, -1, 2$ и -2 . Така, за $x=1$ (11) станува $-6 = A(-6)$ од каде што $A=1$. Потоа, заменувајќи во (11) едно по друго: $x=-1, x=2$ и $x=-2$, добиваме: $12=6B, 36=12C, -48=-12D$, односно $B=2, C=3, D=4$.

б) Случај кога некои од реалните нули на именителот $g(x)$ се повеќекратни. Ако $x=a$ е k -кратна ($k \geq 1$) реална нула на именителот $g(x)$, тогаш

$$g(x) = (x-a)^k g_1(x), \text{ при што } g_1(a) \neq 0.$$

Може да се покаже дека правилната дробка $\frac{f(x)}{g(x)}$ може да се претстави во вид на збир од k прости дроби и друга правилна дробка:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \quad (14)$$

Според тоа, ако именителот $g(x)$ на правилната рационална дробка $\frac{f(x)}{g(x)}$ има повеќекратна реална нула $x=a$ со кратност k , тогаш ќе важи равенството (14), каде што $A_k \neq 0$, $A_{k-1}, A_{k-2}, \dots, A_1$ се реални константи и $f_1(x)$ — некој полином.

Понатаму, ако $g(x)$ има уште и повеќекратна нула (реална) $x=b$ со кратност s , тогаш $g(x) = (x-a)^k (x-b)^s g_2(x)$, каде $g_2(b) \neq 0$ и $g_1(x) = (x-b)^s g_2(x)$. Во тој случај го добиваме равенството

$$\frac{f_k(x)}{g_1(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \frac{B_{s-1}}{(x-b)^{s-1}} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{f_s(x)}{g_2(x)}. \quad (15)$$

Ако $\frac{f_s(x)}{g_2(x)} \neq 0$, тогаш процесот продолжува и со другите повеќекратни реални нули, а доколку е $\frac{f_s(x)}{g_2(x)} = 0$, тогаш процесот на разложување на дробката $\frac{f(x)}{g(x)}$ е завршен.

Слично како и во претходниот случај, непознатите реални коефициенти во равенките (14) и (15) во практика ги одредуваме со помош на познатиот метод на неопределени коефициенти.

в) Именителот $g(x)$ има еднократни или повеќекратни комплексни нули

Да претпоставиме дека $\alpha = a + ib$ е комплексна нула на именителот $g(x)$ на нескратливата правилна дробка $\frac{f(x)}{g(x)}$, чии коефициенти се реални броеви. Тогаш, знаеме дека нула на полиномот $g(x)$ ќе биде и конјугирано комплексниот број $\bar{\alpha} = a - ib$,

при што нивната кратност е иста. Нека секоја од нулите α и $\bar{\alpha}$ е со кратност s . Тогаш, именителот $g(x)$ е делив со полиномот:

$$[(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})]^s = [x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}]^s = [x^2 - 2ax + a^2 + b^2]^s = (x^2 + px + q)^s$$

односно важи равенството

$$g(x) = (x^2 + px + q)^s \cdot g_1(x) \quad (16)$$

при што $g_1(\alpha) \neq 0$ и $g_1(\bar{\alpha}) \neq 0$.

Може да се покаже дека постојат реални броеви $B, C, D, E, \dots, R$ и T и полином $f_s(x)$, такви што важи равенството:

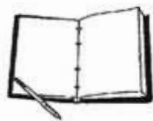
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{Dx + E}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \dots + \frac{Rx + T}{x^2 + px + q} + \frac{f_s(x)}{g_1(x)}. \quad (17)$$

Ако $\frac{f_s(x)}{g_1(x)} \neq 0$, тогаш процесот на разложување продолжува и со другите

еднократни или повеќекратни комплексни нули на $g(x)$. А доколку е $\frac{f_s(x)}{g_1(x)} = 0$, тогаш

процесот на разложување на правилната дробка $\frac{f(x)}{g(x)}$ во збир на прости дробки е завршен.

И во овој случај непознатите реални коефициенти во равенката (17) во практика ги одредуваме со помош на познатиот метод на неопределени коефициенти.



Задачи за самостојна работа

1. Разложи ја правата дробка $\frac{x^3 - 2x - 1}{(x+2)^3(x-1)^2}$ во збир од прости дробки од прв вид.

2. Правата рационална дробка $\frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$ да се разложи во збир од прости дробки од втор вид.

3. Разложи ја во збир од прости дробки од прв и втор вид правата дробка $\frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{(x^3 - x^2 + x - 1)^2}$.

4. Разложи ја правата дробка $\frac{2x}{x^2 + 1}$ во збир од прости дробки од прв вид.

4.13. Полиномни равенки

Овде ќе се задржиме на еден од основните проблеми на теоријата на полиномите, сврзан со одредувањето на нивните нули, што е во тесна врска со поимот алгебарска равенка од една променлива.

Нека е даден полиномот $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, ($a_n \neq 0$).

Равенството $P(x) = 0$, т.е.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (a_n \neq 0) \quad (1)$$

се нарекува **полиномна** или **алгебарска равенка** од n -ти степен по x . Броевите $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ се викаат коефициенти на равенката (1). Очигледно, да се реши равенката (1) значи да се најдат нулите на полиномот $P(x)$.

Бидејќи $a_n \neq 0$, полиномите $P(x)$ и $\frac{1}{a_n} P(x)$ имаат исти нули. Затоа, не се губи од општоста ако прифатиме дека $a_n = 1$. Тогаш равенката (1) има вид

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \quad (2)$$

Кога коефициентите $a_0, a_1, \dots, a_n$ се познати конкретни броеви, равенката (1) се вика нумеричка полиномна равенка или алгебарска равенка со бројни коефициенти, а кога сите коефициенти се запишани со букви (општи броеви), тогаш равенката (1) се вика општа полиномна равенка од n -ти степен.

Ако еден од коефициентите на равенката (1) е конкретен број, или ако меѓу нив постои некоја зависност, тогаш соодветната равенка се вика посебен (специјален) случај на општата равенка. На пример, равенките од четврти степен:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0, \quad x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0, \quad ax^4 + bx^2 + c = 0$$

се специјални случаи од општа полиномна равенка од четврти степен.

Нулите на полиномот $P(x)$ се нарекуваат **корени** на равенката $P(x) = 0$. Значи, равенката $P(x) = 0$ може да има реални, комплексни и повеќекратни корени.

Постапката, т.е. примената на алгоритам со кој ги наоѓаме корените на дадена равенка, се вика решавање на равенката, а множеството од сите добиени корени - решение на равенката.

Основната теорема на алгебрата и последиците од неа, како што видовме, за секој полином од n -ти степен утврдува само постоење на n комплексни нули, но тие не даваат начин за нивно практично наоѓање. Потрагата по методи за решавање на општите полиномни равенки ја воделе видни математичари уште од најстари времиња. Постојат формули за решавање на општите полиномни равенки од трет и четврти степен, аналогни на формулата за решавање на квадратни равенки, но поради нивната гломазност тие не се изучуваат во средно училиште. Не постојат вакви формули за решавање на општа равенка од петти степен и повисок. Докажано е дека формули во кои фигурираат само четирите основни операции и коренувањето во корените на општа алгебарска равенка со степен најмалку 5 не постојат. Затоа се најдени други начини на решавање. Меѓутоа, постојат некои специјални случаи на полиномни равенки за кои множеството решенија може експлицитно да се изрази. Со некои такви специјални случаи ќе се запознаеме во продолжение.

НЕКОИ СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАИ НА РАВЕНКИ ОД ТРЕТ И ЧЕТВРТИ СТЕПЕН

А) Биномни равенки

$$\text{Равенката од видот } ax^n + b = 0 \quad (3)$$

каде $a \neq 0$ и b се дадени комплексни броеви, а n -природен број, се вика биномна равенка од n -ти степен.

$$\text{Таа е еквивалентна со равенката } x^n = -\frac{b}{a} \quad (4)$$

и се решава непосредно со наоѓање на n -ти корен од бројот $-\frac{b}{a}$, т.е. $x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.

Врз основа на познатите својства на коренувањето на комплексни броеви, имаме:

а) Ако $-\frac{b}{a} = 0$, тогаш равенката (3) има единствен корен $x = 0$.

б) Ако $-\frac{b}{a} \neq 0$ е произволен комплексен (во посебен случај реален) број, тогаш во полето на комплексните броеви биномната равенка (3), односно (4) има точно n корени, кои, всушност, се n -те различни вредности на $\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.

Ако биномната равенка е со реални коефициенти a и b ќе покажеме дека за некои одредени вредности на $n \in \mathbb{N}$, тие може да се решаваат и без користење на тригонометриската форма на комплексните броеви, а преку разложување на нивната лева страна на множители. Во зависност од тоа дали коефициентите a и b , на биномната равенка имаат исти или спротивни знаци, секоја од нив се сведува на видот:

$$ax^n - b = 0 \quad \text{или} \quad ax^n + b = 0, \quad (5)$$

каде што a и b се дадени позитивни реални броеви ($a > 0, b > 0$).

$$\text{Со смената } x = y \cdot \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \quad (6)$$

при што со $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ е означена аритметичката вредност на n -тиот корен од позитивниот реален број $\frac{b}{a}$, биномната равенка (5) преминува во видот:

$$y^n - 1 = 0 \quad \text{или} \quad y^n + 1 = 0 \quad (7)$$

За $n = 2, 3, 4, 5, 6$ биномните равенки алгебарски ги решаваме како што следува:

а) $n = 2$:

$$y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y + 1) = 0$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -1$$

$$y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (y - i)(y + i) = 0$$

$$y_1 = i, \quad y_2 = -i$$

б) $n = 3$:

$$y^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ y^2 + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = 1, \quad y_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$y^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(y^2 - y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 = 0 \\ y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = -1, \quad y_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

в) $n = 4$:

$$y^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 1 = 0 \\ y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \pm 1, y_{3,4} = \pm i$$

г) $n = 5$:

$$y^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = 1$$

$$(y^2 + \frac{1}{y^2}) + (y + \frac{1}{y}) + 1 = z^2 + z - 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} 2y^2 - (-1 + \sqrt{5})y + 2 = 0 \\ 2y^2 + (1 + \sqrt{5})y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$y_{2,3} = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})$$

$$y_{4,5} = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$$

д) $n = 6$:

$$y^6 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^3 - 1)(y^3 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - 1 = 0 \\ y^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = 1, y_{2,3} = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$y_4 = -1, y_{5,6} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$y^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^2 + 1 - 2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 + 1)^2 - (\sqrt{2} \cdot y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - \sqrt{2} \cdot y + 1)(y^2 + \sqrt{2} \cdot y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - \sqrt{2}y + 1 = 0 \\ y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$$

$$y_{3,4} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$$

$$y^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(y^4 - y^3 + y^2 - y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 = 0 \\ y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = -1$$

$$(y^2 + \frac{1}{y^2}) - (y + \frac{1}{y}) + 1 = z^2 - z - 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - (1 + \sqrt{5})y + 2 = 0 \\ 2y^2 - (1 - \sqrt{5})y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$y_{2,3} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$$

$$y_{4,5} = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})$$

$y^6 + 1 = 0$ Со смената $y = zi$, таа преминува во

$(zi)^6 + 1 = 0$ или $z^6 - 1 = 0$, бидејќи $i^6 = -1$. Значи:

$$y_1 = z_1 i = 1 \cdot i = i$$

$$y_2 = z_2 i = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$y_3 = z_3 i = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$y_4 = -i, y_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, y_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Пример 1 Реши ја равенката $64x^6 + 27 = 0$.

Решение. Со смената $x = y \sqrt[6]{\frac{27}{64}} = y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ дадената равенка по однос на променливата y се сведува на $y^6 + 1 = 0$. Според тоа, корените на дадената равенка согласно смената ќе ги добијеме кога секој корен на равенката $y^6 + 1 = 0$ ќе го помножиме со бројот $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Така добиваме:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = y_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \\ x_3 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad x_5 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \\ x_6 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i. \end{aligned}$$

Б) Триномни равенки

Триномни равенки се викаат полиномните равенки од видот:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \quad (a \neq 0, n \in \mathbb{N}) \quad (8)$$

каде што a, b, c се дадени комплексни или реални броеви.

Триномните равенки ги решаваме алгебарски со воведување на нова (помошна) променлива y со смената $x^n = y$. Тогаш равенката (8) преминува (по однос на новата променлива) во квадратна равенка

$$ay^2 + by + c = 0 \quad (9)$$

чиј корени се: $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, при што со $\sqrt{b^2 - 4ac}$ е означена една од вредностите на $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

Според тоа, решавањето на триномната равенка (8) се сведува на решавање на вкупноста од две биномни равенки од n -ти степен:

$$\begin{cases} x^n = y_1 \\ x^n = y_2 \end{cases}$$

т.е. множеството решенија на триномната равенка е унијата од множествата решенија на последните две равенки.

Пример 2 Решај ја триномната равенка: $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

Решение. Со смената $x^4 = y$ таа преминува во квадратната равенка $y^2 - 17y + 16 = 0$, од каде $y_1 = 1, y_2 = 16$.

Потоа ги решаваме биномните равенки од четврти степен:

$$x^4 - 1 = 0, \quad x^4 - 16 = 0. \text{ Тие имаат корени: } x_{1,2} = \pm 1, \quad x_{3,4} = \pm i, \quad x_{5,6} = \pm 2, \quad x_{7,8} = \pm 2i,$$

а тие се и бараните корени на дадената триномна равенка, т.е. $\{-1, 1, -i, i, -2, 2, -2i, 2i\}$ е множеството решенија на разгледуваната триномна равенка.

Специјален случај на триномната равенка (8) за $n = 2$ е полиномната равенка

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad (a \neq 0) \quad (10)$$

која уште се вика и **биквадратна равенка**.

В) Симетрични равенки

Полиномната равенка од n -ти степен:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad (a_n \neq 0) \quad (11)$$

се вика симетрична равенка од n -ти степен, ако коефициентите на членовите, што се еднакво оддалечени од почетокот и крајот, се еднакви. Со други зборови, коефициентите на симетричната равенка од n -ти степен го задоволуваат условот:

$$a_k = a_{n-k}, \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Според тоа, симетричната равенка од n -ти степен го има видот:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad (a_0 \neq 0). \quad (12)$$

Бидејќи $a_n = a_0 \neq 0$, затоа $x = 0$ не може да биде корен на равенката (12).

Симетричните равенки го имаат следново важно својство:

Теорема 1.

Ако $x = \alpha$ е корен на симетричната равенка (12), тогаш и $x = \frac{1}{\alpha}$ е нејзин корен.

Доказ. Нека $x = \alpha$ е корен на равенката (12). Тогаш ќе важи:

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad (13)$$

Делејќи ги двете страни на равенството (13) со α^n , добиваме:

$$a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{\alpha} + a_2 \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \dots + a_2 \cdot \frac{1}{\alpha^{n-2}} + a_1 \cdot \frac{1}{\alpha^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{\alpha^n} = 0$$

$$\text{т.е. } a_0 + a_1 \left(\frac{1}{\alpha}\right) + a_2 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \dots + a_2 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2} + a_1 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + a_0 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0$$

Тоа покажува дека и $x = \frac{1}{\alpha}$ е корен на равенката (12).

Поради ова својство, симетричните равенки често ги викаме уште и **реципрочни равенки**.

Да ја разгледаме симетричната равенка од парен степен:

$$a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + a_2 x^{2k-2} + \dots + a_{k-1} x^{k+1} + a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (14)$$

Во неа постои еден среден член - центар на симетрија, за кој коефициентите на членовите, што се симетрични спрема него, се еднакви. Ако ги поделеме двете страни на равенката (14) со x^k ($\neq 0$) и ги групираме членовите со соодветно еднакви коефициенти, ќе ја добиеме следната равенка која е еквивалентна со неа.

$$a_0 \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + a_1 \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + a_2 \left(x^{k-2} + \frac{1}{x^{k-2}}\right) + \dots + a_{k-1} \left(x + \frac{1}{x}\right) + a_k = 0 \quad (15)$$

Потоа ако ставиме $x + \frac{1}{x} = y$, добиваме едно по друго:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} &= y^2 - 2, & x^3 + \frac{1}{x^3} &= y^3 - 3y, & x^4 + \frac{1}{x^4} &= y^4 - 4y^2 + 2, \\ x^5 + \frac{1}{x^5} &= y^5 - 5y^3 + 5y, & \dots, & & x^k + \frac{1}{x^k} &= y^k - ky^{k-2} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Со замена на овие вредности од (16) и (15), ќе добиеме равенка од $k = \frac{n}{2}$ степен по однос на новата променлива y :

$$b_0 y^k + b_1 y^{k-1} + b_2 y^{k-2} + \dots + b_{k-1} y + b_k = 0 \quad (17)$$

Соодветните вредности на x ги добиваме од смената $x + \frac{1}{x} = y$, односно од квадратната равенка $x^2 - yx + 1 = 0$.

Пример 3 Реши ја симетричната равенка $x^6 + 3x^5 - x^4 - 6x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$.

Решение. Ја доведуваме равенката во видот (15) и со смената $x + \frac{1}{x} = y$, добиваме:

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(x^2 + \frac{1}{x^2}) - (x + \frac{1}{x}) - 6 = 0, \text{ т. е. } (y^3 - 3y) + 3(y^2 - 2) - y - 6 = 0, \text{ односно } y^3 + 3y^2 - 4y - 12 = 0.$$

Оваа равенка од трет степен со разложување на нејзината лева страна на множители, лесно ја доведуваме во видот: $y^2(y+3) - 4(y+3) = 0$, или $(y+3)(y^2 - 4) = 0$, од каде што $y_1 = -3$, $y_2 = 2$ и $y_3 = -2$.

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -3 \\ x + \frac{1}{x} = 2 \\ x + \frac{1}{x} = -2 \end{cases} \quad \text{односно} \quad \begin{cases} x^2 + 3x + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Од нив добиваме: } x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, x_{3,4} = -1, x_{5,6} = 1.$$

Покрај, разгледаните симетрични равенки, кои ќе ги викаме **симетрични равенки од прв ред**, разликуваме и **симетрични равенки од втор и трет ред**. Нив ги дефинираме вака:

Полиномна равенка чии коефициенти на членовите што се еднакво оддалечени од почетокот и крајот се спротивни броеви, се вика симетрична равенка од втор ред. Значи, нејзините коефициенти го задоволуваат условот

$$a_k = -a_{n-k} \quad (k=1, 2, \dots, n) \text{ и го имаат видот:}$$

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (17)$$

Ако равенката (17) е од парен степен, тогаш таа има непарен број членови, што значи дека таа треба да има еден среден член - центар на симетријата. Нека е тоа членот $a_k x^k$ чиј коефициент a_k треба да биде таков број што тој и неговиот спротивен број $-a_k$ да се ист број. Од $a_k = -a_k$, или $2a_k = 0$ добиваме $a_k = 0$. Според тоа, симетричните равенки од втор ред и парен степен немаат среден член.

Оттука следува дека збирот од коефициентите кај секоја симетрична равенка од втор ред (било да е таа од парен или непарен степен) е еднаков на нула, а тоа значи дека таа има еден корен $x_1 = 1$, односно дека нејзината лева страна е делива со биномот $x - 1$. Може да се покаже дека количникот од делењето на левата страна на симетричната

равенка од втор ред (од било кој степен) со $x-1$, е исто симетричен полином, но од прв ред, т.е. симетричната равенка (17) од втор ред може да се доведе во видот:

$$(x-1)(a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_2x^2 + b_1x + a_0) = 0 \quad (18)$$

односно да се сведе на симетрична равенка од прв ред со степен $n-1$.

Пример 4 Реша ја равенката $x^5 - 11x^4 + 36x^3 - 36x^2 + 11x - 1 = 0$.

Решение. Таа има еден корен $x_1 = 1$, бидејќи $1 - 11 + 36 - 36 + 11 - 1 = 0$. Непосредно ова може да се воочи ако членовите на равенката се групираат како што следува

$$(x^5 - 1) - 11x(x^3 - 1) + 36x^2(x - 1) = 0.$$

Нејзината лева страна ја делиме со $x-1$, и добиваме

$$(x-1)(x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1) = 0.$$

Ја решаваме симетричната равенка од прв ред:

$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0:$$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 10(x + \frac{1}{x}) + 26 = (y^2 - 2) - 10y + 26 = 0, \text{ или } y^2 - 10y + 24 = 0, \text{ од каде што}$$

$$\text{следува дека } y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = 5 \pm 1, \text{ т. е. } y_1 = 4, y_2 = 6. \text{ Од } \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 4 \\ x + \frac{1}{x} = 6 \end{cases} \text{ добиваме:}$$

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}, \quad x_{4,5} = 3 \pm \sqrt{8}.$$

Според тоа, дадената равенка има корени: $x_1 = 1, x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}, x_{4,5} = 3 \pm \sqrt{8}$.

Полиномните равенки од парен степен ($n = 2k$) од видот:

$$a_0x^{2k} + a_1x^{2k-1} + a_2x^{2k-2} + \dots + a_{k-1}x^{k+1} + a_kx^k + a_{k-2}x^{k-2} - \dots + (-1)^{k-1}a_1x + (-1)^k a_0 = 0 \quad (19)$$

($a_0 \neq 0, k \in \mathbb{N}$)

се викаат симетрични равенки од трет ред.

При $n = 4, 6, 8$ тие го имаат видот:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \quad (20)$$

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 - cx^2 + bx - a = 0 \quad (21)$$

$$ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 - dx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \quad (22)$$

Значи, кај симетричните равенки чиј степен е делив со 4 ($n = 4, 8, 12, \dots$)

коэффициентите на членовите, што се еднакво оддалечени од почетокот и крајот: при парните степени на x , се еднакви; а при непарните степени тие се спротивни. А кај симетричните равенки, чиј степен е делив со 2 (но не и со 4) ($n = 6, 10, 14, \dots$) коэффициенти на членовите што се еднакво оддалечени од почетокот и крајот, при парните степени на x , се спротивни, а при непарните степени, тие се еднакви.

Овие равенки со делење на двете нивни страни со x^k се сведуваат на поедноставни.

Така, на пример, равенката (22) со делење со x^4 , се сведува на:

$$a(x^4 + \frac{1}{x^4}) + b(x^3 + \frac{1}{x^3}) + c(x^2 + \frac{1}{x^2}) + d(x - \frac{1}{x}) + e = 0 \quad (23)$$

Со воведување на смената $x - \frac{1}{x} = y$, а имајќи предвид дека:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = y^2 + 2$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right) = y(y^2 + 2 + 1) = y^3 + 3y$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = (y^2 + 2) - 2 = y^4 + 4y^2 + 2$$

таа се сведува на некоја равенка од 4-ти степен по однос на новата променлива y .

Пример 5 Решај ја равенката $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$.

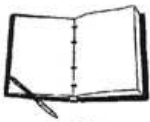
Решение. Таа е симетрична равенка од трет ред. Двете нејзини страни ги делиме со x^2 :

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x - \frac{1}{x}\right) + 4 = 0, \text{ односно } y^2 + 5y + 6 = 0 \text{ по однос на } y.$$

Од неа добиваме $y_1 = -3, y_2 = -2$. Потоа ја решаваме вкупноста на равенки:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = -3 \\ x - \frac{1}{x} = -2 \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 1 = 0 \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Оттука: } x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}, x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}.$$



Задачи за самостојна работа

Решај ги следниве равенки:

1. $x^8 - 1 = 0$.

2. $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$.

3. $6x^5 - 5x^4 - 29x^2 - 5x + 6 = 0$.

4. $3x^6 - 10x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 10x - 3 = 0$.

4.14. Задачи за вежбање

1. Разложи ги рационалните дробки во збир од прости дробки:

а) $\frac{3x-1}{x^2+x-6}$,

б) $\frac{2x-1}{x^2-3x+2}$,

в) $\frac{4x^2-x-15}{x^3-4x^2-x+4}$,

г) $\frac{x^2-3x-8}{x^3-7x-6}$.

2. Разложи во збир на прости дробки од прв вид:

а) $\frac{x}{x^3-3x+2}$,

б) $\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$,

в) $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$.

3. Разложи во збир на прости дробки од прв и втор вид:

а) $\frac{1}{(x^3-3x^2+5x-3)^3}$,

б) $\frac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}$,

в) $\frac{x^2}{x^4-16}$.

4*. Во полето на комплексните броеви претстави ги како збир од прости дробки од прв вид, правите рационални дробки:

$$\text{a)} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}, \quad \text{б)} \frac{1}{x^3-1}, \quad \text{в)} \frac{1}{x^4+4}, \quad \text{г)} \frac{1}{(x^4-1)^2}.$$

5*. За кои природни броеви n , и следниве дробки се природни броеви:

$$\text{a)} \frac{n^2 - n + 2}{n + 1}, \quad \text{б)} \frac{2n^2 + 3n - 3}{n - 2}, \quad \text{в)} \frac{2n^3 + 3n^2 - 8n + 9}{n + 3}.$$

6. Најди ја вредноста на полиномот:

$$\text{a)} f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 5 \text{ за } x = -3;$$

$$\text{б)} g(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^3 - 3x + 1 \text{ за } x = 5.$$

7. Најди ја вредноста на полиномот: $P(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7$ за:

$$\text{a)} x = 1; \quad \text{б)} x = i; \quad \text{в)} x = -i; \quad \text{г)} x = 2 - i.$$

8. При делење на полиномот $P(x)$ со $x - a$ се добива остаток α , а при делење со $x - b$ се добива остаток β . Колкав ќе биде остатокот при делење на полином $P(x)$ со $(x - a)(x - b)$?

9. Најди ги коефициентите a и b на полиномот $f(x) = 5x + ax^2 + bx + 1$ така што бројот -1 да е барем негова двократна нула.

10. Испитај дали полиномот $f(x) = x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6$ е делив со производот $(x+1)(x+2)(x-3)$ и, ако е делив, одреди го полиномот количник.

11. Одреди го полиномот $f(x)$ од трет степен кој за вредностите на x : $-1, 0, 1, 2$ добива вредности: $f(-1) = 6, f(0) = 6, f(1) = 10, f(2) = 24$.

12. Најди полином $P(x)$ од четврти степен за кој:
 $P(-1) = 3, P(0) = 5, P(1) = 5, P(2) = -3, P(3) = -1$.

13. Да се изберат полиноми $A(x)$ и $B(x)$ од најнизок степен кои ќе го задоволуваат равенството: $(x^4 + 2x^3 + x + 1)A(x) + (x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1)B(x) = x^3 - 2x$.

14. Одреди ги целите нули на полиномите, ако има такви:

$$\text{a)} x^5 - 20x^3 - 21x + 20; \quad \text{б)} x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

15. Одреди ги рационалните нули на полиномите:

$$\text{a)} 2x^3 + x^2 + x - 1; \quad \text{б)} 9x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x - 2.$$

16. Најди ги параметрите p и k така што полиномот $x^4 + px^2 + k$ да биде делив со полиномот $x^2 + px + k$.

17. Реши ги равенките:

$$\text{a)} \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0;$$

$$\text{б)} 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = 0;$$

$$\text{в)} x^4 + 5x^2 + 4 = 0;$$

$$\text{г)} x^5 - 32 = 0.$$

18. Да се изберат полиноми $A(x)$ и $B(x)$ од најнизок степен кои ќе го задоволуваат равенството: $(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 1) \cdot A(x) + (x^3 - 5x - 3) \cdot B(x) = x^4$.

19. Кој услов треба да го задоволуваат коефициентите a , b и c на полиномот $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, така што за неговите нули да важи релацијата: $x_1 + x_2 = x_3$?

20. Дадени се рационалните дробки $\frac{x-1}{x+1}$ и $\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$. Провери дали тие се еднакви и, ако се еднакви, одреди ја нивната вредност за $x = -2$.

5. РАВЕНКИ, СИСТЕМИ РАВЕНКИ, НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ НЕРАВЕНКИ

5.1. Експоненцијални равенки

На почеток да напоменеме дека во сите равенки што ќе ги разгледуваме непознатата x прима вредности во множеството реални броеви.

Дефиниција 1.

Равенките во кои непознатата се појавува само во степен показател се викаат експоненцијални равенки.

Пример 1 Експоненцијални равенки се: $4^{x-3} = 2^x$, $2 \cdot 3^{x+3} = 5 \cdot 3^x + 49$, $17^x = 5$,

$$\left(\frac{7}{8}\right)^{x-1} = (0,3)^{\frac{3}{x}} + 5; 13^{\sqrt{x}} = 2^x + 1; 10^x = 1.$$

При решавање на експоненцијалните равенки се користат дефинициите за степен и логаритам, правилата за степени и најчесто следните еквивалентности:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x), a > 0, a \neq 1;$$

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a(a^{f(x)}) = \log_a(b^{g(x)}), a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1.$$

Ќе разгледаме повеќе начини на решавање на експоненцијални равенки, односно како се решаваат некои видови на експоненцијални равенки.

А) Равенки од видот $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$

Пример 2 Да се решат равенките:

а) $3^{-3x} = \frac{1}{9^{x+1}}$,

б) $5^{x^2-2} = 1$,

в) $0,2^{x^2+x} = \sqrt{0,008}$.

Решение. Ги запишуваме степените со иста основа:

а) $3^{-3x} = \frac{1}{9^{x+1}}$

б) $5^{x^2-2} = 5^0$

в) $0,2^{x^2+x} = \sqrt{0,008}$

$3^{-3x} = 3^{-2(x+1)}$

$x^2 - 2 = 0$

$x^2 + x = \frac{3}{2}$

$-3x = -2x - 2$

$x^2 = 2$

$2x^2 + 2x - 3 = 0$

$-x = -2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$.

$x = 2$.

Б) Равенки од видот $a^{f(x)} = b, a \neq 1, b > 0$

За решавање на експоненцијалните равенки од овој вид, ќе ја користиме следнава еквивалентност: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.

Равенката од видот $a^{f(x)} = b$ кога $b < 0$ нема решение, бидејќи $a^x > 0$ за секое x .

Пример 3 Решај ја равенката $3^{5x+2} = 7$.

Решение. Од $3^{5x+2} = 7 \Leftrightarrow 5x + 2 = \log_3 7$ добиваме дека $x = \frac{1}{5}(\log_3 7 - 2)$.

В) Равенки од видот $a^{f(x)} = b^{g(x)}, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$

Равенките од овој вид се решаваат со логаритмирање на двете страни со основа a или b .

Пример 4 Реша ја равенката $3 \cdot 2^{x-5} = 5 \cdot 7^{2x}$.

Решение. Равенката ја логаритмираме со основа 2.

$$\log_2 3 + \log_2 2^{x-5} = \log_2 5 + \log_2 7^{2x}; \quad \log_2 3 + x - 5 = \log_2 5 + 2x \cdot \log_2 7;$$

$$(1 - 2 \log_2 7)x = \log_2 5 - \log_2 3 + 5; \quad x = \frac{\log_2 5 - \log_2 3 + \log_2 32}{\log_2 2 - \log_2 7^2};$$

$$x = \frac{\log_2 \frac{160}{3}}{\log_2 \frac{2}{49}}.$$

Г) Равенки од видот $A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C = 0$

Со замената $a^{f(x)} = t$ ја добиваме квадратната равенка $A \cdot t^2 + B \cdot t + C = 0$. Потоа за секоја добиена вредност за t ја решаваме експоненцијалната равенка $a^{f(x)} = t$.

Пример 5 Реша ја равенката $9^{2x^2-x} = 3^{2x^2-x} + 6$

Решение. Со замената $3^{2x^2-x} = t$ се добива равенката $t^2 = t + 6$, односно $t^2 - t - 6 = 0$ чии решенија се $t_1 = -2$, $t_2 = 3$.

Равенката $3^{2x^2-x} = -2$ нема решение.

Од равенката $3^{2x^2-x} = 3$ имаме $3^{2x^2-x} = 3^1$, $2x^2 - x = 1$, $2x^2 - x - 1 = 0$, $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Значи дадената експоненцијална равенка има две решенија: $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Д) Равенки со извлекување на множител

Пример 6 Реша ја равенката $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$.

Решение. $2^{x-1}(2^2 + 3 - 5 \cdot 2) = -6$, $2^{x-1} = 2$, $x - 1 = 1$, $x = 2$.

Ѓ) Равенки од видот $A \cdot a^x + B \cdot b^x = 0$

Ваква равенка се вика хомогена од прв степен по a^x и b^x . Равенката од овој вид се дели со a^x или со b^x , притоа имаме:

$$A \cdot a^x + B \cdot b^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^x = -\frac{A}{B} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = -\frac{B}{A}$$

Равенката има решение при $AB < 0$.

Пример 7 Реша ја равенката $3^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} = 2^{x-1} - 9^{x+1}$.

Решение. $9^x - 3 \cdot 2^{x+1} = 2^{x-1} - 9^{x+1}$; $9^x + 9^{x+1} = 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x+1}$;

$$9^x + 9 \cdot 9^x = \frac{1}{2} \cdot 2^x + 6 \cdot 2^x; \quad 10 \cdot 9^x = \frac{13}{2} \cdot 2^x; \quad \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{13}{20}, \quad x = \log_{\frac{9}{2}} \frac{13}{20}.$$

Е) Равенки од видот $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x b^x + C \cdot b^{2x} = 0$

Оваа равенка се вика хомогена од втор степен во однос на a^x и b^x . По делењето со a^{2x} или b^{2x} , се добива равенка од видот Г).

$$A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x b^x + C \cdot b^{2x} = 0 \Leftrightarrow A \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B \left(\frac{a}{b}\right)^x + C = 0.$$

Пример 8 Решете ја равенката $25^{x+1} + 21 \cdot 10^x - 4 \cdot 2^{2x} = 0$.

Решение. $25^{x+1} + 21 \cdot 10^x - 4 \cdot 2^{2x} = 0$; $25 \cdot 5^{2x} + 21 \cdot 5^x \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{2x} = 0$; $25 \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + 21 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x - 4 = 0$

Со замена $\left(\frac{5}{2}\right)^x = t$ добиваме: $25 \cdot t^2 + 21 \cdot t - 4 = 0$ чии решенија се $t_1 = -1, t_2 = \frac{4}{25}$.

Равенката $\left(\frac{5}{2}\right)^x = -1$ нема решение.

Од равенката $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{4}{25}$ се добива $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$, односно $x = -2$.

Пример 9 Решете ги равенките:

а) $(5-x)^{x^2-3x+2} = 1$,

б) $5^x + 7^x = 12^x$,

в) $3^x + 4^x = 25$.

Решение. а) Равенството е точно за следните три случаи:

✓ $x^2 - 3x + 2 = 0$, од каде што $x_1 = 1, x_2 = 2$,

✓ $5 - x = 1$, од каде што $x = 4$,

✓ $5 - x = -1$, а $x^2 - 3x + 2$ е парен број. Тогаш $x = 6$ и $x^2 - 3x + 2 = 20$. Значи решенија на равенката се: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 6$.

б) Равенката има решение $x = 1$. Ќе покажеме дека равенката нема друг корен. Ако двете страни ги поделиме со 12^x имаме: $\left(\frac{5}{12}\right)^x + \left(\frac{7}{12}\right)^x = 1$. Функциите $\left(\frac{5}{12}\right)^x$ и $\left(\frac{7}{12}\right)^x$ се

монотонно опаѓачки. Тогаш и збирот $\left(\frac{5}{12}\right)^x + \left(\frac{7}{12}\right)^x$ е монотонно опаѓачка функција.

Равенките од видот $f(x) = \text{const}$ кога $f(x)$ е монотонно опаѓачка или монотонно растечка функција, има најмногу едно решение. Во нашиот случај равенката има решение $x = 1$.

в) Функцијата $f(x) = 3^x + 4^x$ е растечка функција во интервалот $(-\infty, +\infty)$ и $f(2) = 3^2 + 4^2 = 25$. Равенката има решение $x = 2$.



Задачи за самостојна работа

Решете ги равенките:

1. $\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{49}$.

7. $3 \cdot 25^x - 2 \cdot 5^x - 1 = 0$.

2. $3^{x^2 - \frac{5}{7}x} = \sqrt[3]{9}$.

8. $25^x + 3 \cdot 5^{x+1} - 100 = 0$.

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} = 4$.

9. $4^{3x-4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3x} = 8$.

4. $3 \cdot 2^{x-2} = 5 \cdot 3^{2x+1}$.

10. $9 \cdot 5^x - 5 \cdot 3^x = 0$.

5. $5^{x-3} = 7^{x^2-2x-3}$.

11. $(x-2)^{x^2-3x-4} = 1$.

6. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$.

12. $5 \cdot 3^x + 7 \cdot 2^x = 73$.

5.2. Логаритамски равенки

Дефиниција 1.

Равенките кај кои непознатата се наоѓа само под знакот за логаритам (како аргумент или основа) се викаат **логаритамски равенки**.

Пример 1 Логаритамски равенки се: $\log_2(x+3)=5$, $\log_6(x+1)=3$, $\log_{2x}(3+x^2)=7$, $\log_{0,5}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}} x = 1$, $\log_3(2x-1) = \log_3 5$, $\log_x(x+1) = 4$.

А) Равенки од видот $\log_a f(x) = b$, $a > 0$, $a \neq 1$

Од дефиницијата за логаритам следува дека:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^b = f(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Од равенството $a^b = f(x)$ следува дека $f(x) > 0$, бидејќи $a^x > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$.

Пример 2 Решете ги равенките:

а) $\log_2 x = 3$ б) $\log_3(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+3) = 1$

Решение. а) $\log_2 x = 3$, $x = 2^3 = 8$, $x = 8 > 0$.

б) $\log_3(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+3) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$$

$$\log_3(x+1)(x+3) = 1, \quad (x+1)(x+3) > 0$$

$$(x+1)(x+3) = 3 \quad \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+4) = 0 \quad x > -1$$

$$x_1 = 0, x_2 = -4$$

Но, $x = -4$ не е решение на равенката под б) бидејќи $-4 \notin (-1, +\infty)$.

Б) Равенки од видот $\log_a f(x) = \log_a g(x), a > 0, a \neq 1$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$$

Еквивалентноста на двете равенки следува од фактот дека логаритамската функција е монотонно растечка, при $a > 0$ и монотонно опаѓачка при $0 < a < 1$.

За да има смисла условот во првата равенка ($\log_a f(x) = \log_a g(x)$), треба во втората равенка ($f(x) = g(x)$) да се постави условот $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Но, бидејќи $f(x) = g(x)$ доволно е да земеме еден од условите $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$, во зависност од тоа која неравенка е поедноставна за решавање.

Пример 3 Реши ги равенките:

а) $\log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4)$ б) $\log_3(x + 1)(x + 3) = 1$ в) $\lg(3x - 2 - 2x^2) = \lg(x^2 - 10x - 12)$

$$\log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4) \Leftrightarrow \log_3(x + 1)(x + 3) = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3x - 2 - 2x^2 = x^2 - 10x - 12 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 11 = x - 4, x - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow (x + 1)(x + 3) = 3 \quad \Leftrightarrow 3x^2 - 13x - 10 = 0, x = -\frac{2}{3}.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0, x = 5.$$

$$x^2 + 4x = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = -4.$$

а) Од добиените вредности за x , само $x = 5$ го задоволува условот $x - 4 > 0$. Значи, дадената равенка има единствено решение $x = 5$.

б) Од условот $(x + 1)(x + 3) > 0$ следува дека $x > -1$ или $x < -3$ па дадената равенка има две решенија $x_1 = 0$ и $x_2 = -4$.

в) Од условот $3x - 2 - 2x^2 > 0$ и $x^2 - 10x - 12 > 0$ следува дека равенката има единствено решение $x = -\frac{2}{3}$.

В) Логаритамски равенки кои се доведуваат до видовите

$$\log_a f(x) = b \quad \text{и} \quad \log_a f(x) = \log_a g(x), a > 0, a \neq 1$$

При извршување на некои трансформации, кои дадената равенка ја доведуваат до равенката од видот А) или Б), може да се смени множеството вредности на променливата x , кои се дозволени, т.е. може да дојде до „губење“ на решение, или „добивање“ резултати кои не се решенија на равенката. Затоа треба да се прават трансформации кои дадената равенка ја претставуваат во еквивалентна равенка.

Пример 4 Реши ги равенките:

а) $4 - \lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$, б) $\log_2(x - 2) + \log_2 x = 3$, в) $\lg(1 - \frac{x}{4}) = \lg \sqrt{x + 2} - 2 \lg 2$.

Решение. а) Ако замениме $\sqrt{\lg 2x} = t$ ја добиваме равенката: $4 - t^2 = 3t$ со условот $t \geq 0$. Од $t^2 + 3t - 4 = 0$, се добива $t_1 = 1, t_2 = -4$. Вредноста -4 треба да се отфрли бидејќи равенката $\sqrt{\lg 2x} = -4$ нема решение.

Од $\sqrt{\lg 2x} = 1$ добиваме равенка од видот А): $\lg 2x = 1, 2x = 10, x = 5$.

Значи, дадената равенка има само едно решение $x = 5$.

б) Ако ги користиме правилата за логаритмирање, добиваме равенка од видот А). $\log_2(x(x-2))=3 \Leftrightarrow x(x-2)=2^3$, но притоа $x-2>0$ и $x>0$. Равенката $x(x-2)=2^3$, т.е. $x^2-2x-8=0$, има решенија $x_1=-2$, $x_2=4$. Бидејќи $-2<0$, x_1 не е решение на разгледуваната равенка. Значи дадената равенка има еден корен $x=4$.

в) Со користење на правилата за логаритмирање, добиваме равенки од видот Б)
 $\lg(1-\frac{x}{4})=\lg\frac{\sqrt{x+2}}{4}$ и притоа $4-x>0$ и $x+2>0$, т.е. $x<4$ и $x>-2$. Значи $D=(-2,4)$.
 Тогаш $1-\frac{x}{4}=\frac{\sqrt{x+2}}{4}$, или $\sqrt{x+2}=4-x$. Оттука $x+2=(4-x)^2$, или $x^2-9x+14=0$, чии корени се $x_1=2$ и $x_2=7$. Вториот корен, $7 \notin D$. Значи, разгледуваната равенка има еден корен, $x=2$.

Г) Равенки во кои променливата x се јавува во логаритмот и во основата

При решавање на логаритамски равенки од овој вид, правиме такви трансформации со кои сите можни логаритми се доведуваат до една иста основа.

Пример 5 Реси ја равенката: $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1$.

Решение. Множеството на дозволени вредности за x го одредуваме од условот $x>0$, $3x \neq 1$, односно $D=(0,\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3},+\infty)$. Користејќи го познатото равенство

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ дадената равенка ја трансформираме во логаритамската равенка $\frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3 3x} + \log_3^2 x = 1$, која е еквивалентна на равенката $\frac{\log_3 3 - \log_3 x}{\log_3 3 + \log_3 x} + \log_3^2 x = 1$.

Со замената $y=\log_3 x$, добиваме: $\frac{1-y}{1+y} + y^2 = 1$. Оваа равенка може да ја запишеме во обликот $\frac{1-y}{1+y} = (1-y)(1+y)$ од којшто се гледа непосредно дека $y=1$ е еден корен на равенката. Кратејќи ги двете страни на равенката со $1-y$, со што се отстранува коренот $y_1=1$, добиваме

$$\frac{1}{1+y} = 1+y, \quad 1=1+2y+y^2, \quad y(y+2)=0, \quad y_2=0, \quad y_3=-2.$$

Од ознаките за y се добиваат $\log_3 x=1$, $\log_3 x=0$ и $\log_3 x=-2$ и соодветно корените $x_1=3$, $x_2=1$ и $x_3=\frac{1}{9}$, кои се позитивни и различни од $\frac{1}{3}$. Значи, тие се корени и на појдовната равенка.

Пример 6 Реси ја равенката $\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$.

Решение. Можни се следниве случаи:

✓ Ако $a=1$ тогаш имаме $\log_x 1 + \log_x 1 + 3\log_x 1 = 0$ за секој $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

✓ Ако $a \leq 0$ тогаш равенката нема решение, бидејќи не постои логаритам од негативен број.

✓ Ако $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ тогаш равенката се сведува на

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a ax} + \frac{3}{\log_a a^2 x} = 0, \text{ или } \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a a + \log_a x} + \frac{3}{\log_a a^2 + \log_a x} = 0, \text{ и}$$

еквивалентно $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{1 + \log_a x} + \frac{3}{2 + \log_a x} = 0.$

Со замената $\log_a x = y$ добиваме:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{1+y} + \frac{3}{2+y} = 0, \quad 5y^2 + 8y + 2 = 0, \quad y_{1,2} = \frac{1}{5}(-4 \pm \sqrt{6}).$$

Враќајќи се на смената $\log_a x = y$ добиваме:

$$x_1 = \sqrt[5]{a^{-4+\sqrt{6}}} \text{ и } x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{a^{4+\sqrt{6}}}}. \text{ Овие } x_1, x_2 \neq 1 \text{ и } x_1, x_2 > 0, \text{ па значи се решенија на}$$

разгледуваната равенка.

Пример 7 Реша ја равенката $3^{2+\lg x} + 3^{\lg x} = 30.$

Решение. Користејќи ги својствата на степени и познатите начини за решавање на експоненцијални равенки добиваме:

$$3^2 \cdot 3^{\lg x} + 3^{\lg x} = 30, \quad 3^{\lg x}(3^2 + 1) = 30, \quad 3^{\lg x} \cdot 10 = 30, \quad 3^{\lg x} = 3, \quad \lg x = 1, \quad x = 10$$

Пример 8 Реша ја равенката $\log_{\frac{1}{2}} \left(5^{\lg x} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x} \right) = \lg x - 3.$

Решение. Изразот $\lg x - 3$ го запишуваме како $\log_{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x - 3} \right)$ и тогаш

$$\log_{\frac{1}{2}} \left[5^{\lg x} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x} \right] = \log_{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x - 3} \right]. \text{ Потоа ја добиваме равенката}$$

$$5^{\lg x} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x - 3} > 0 \text{ и на неа еквивалентните равенки:}$$

$$5^{\lg x} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x} + \left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x - 3} \Leftrightarrow 5^{\lg x} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\lg x} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} \right] \Leftrightarrow 5^{\lg x} \left(\frac{1}{2} \right)^{-\lg x} = 9 \Leftrightarrow 10^{\lg x} = 9 \Leftrightarrow x = 9$$

Со проверување во разгледуваната равенка заклучуваме дека $x = 9$ е нејзино решение.



Задачи за самостојна работа

Реша ги логаритамските равенки:

1. а) $\log_{\frac{1}{5}}(x-1) = -1,$

б) $\log_4 x^2 = \frac{1}{2}.$

- в) $\log_{0,5}(x^2 - 4x + 3,25) = 2$,
2. а) $\log_6(3x + 4) = \log_6 x$,
 в) $\log_{1,4}(x - 13) + 3 \log_{1,4} 2 = \log_{1,4}(3x + 1)$,
3. а) $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$,
 в) $2 \log_x 25 - 3 \log_{25} x = 1$,
4. а) $\log_3^2 x + 3 \log_3 x - 4 = 0$,
 в) $2(\log_x \sqrt{5})^2 - 3 \log_x \sqrt{5} + 1 = 0$.
5. Реши ги равенките:
- а) $\log_3(1 - x) = \log_3 \frac{6}{2 - x}$,
 в) $\lg(5^{\sqrt{x-1}} + 1) - \lg 25 = \lg(5^{1-\sqrt{x-1}} + 5)$,
- р) $\log_{0,2} \frac{x-1}{2x+4} = -1$.
- б) $\log_2(x+1)^2 = 4 \log_2 x$,
 г) $\lg_6(2x+2) + \lg(15-x) = 1 + \lg 3$.
- б) $\log_x(7x^2 - 5x + 1) = 2$,
 р) $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4$.
- б) $\lg^2 x - 3 \lg x = \lg x^2 - 4$,
- б) $x^{2 \lg^3 x - 1,5 \lg x} = \sqrt{10}$,
 г) $3^{2+\lg x} - 3^{1+\lg x} + 3^{\lg x} = 21$.

5.3. Тригонометриски равенки

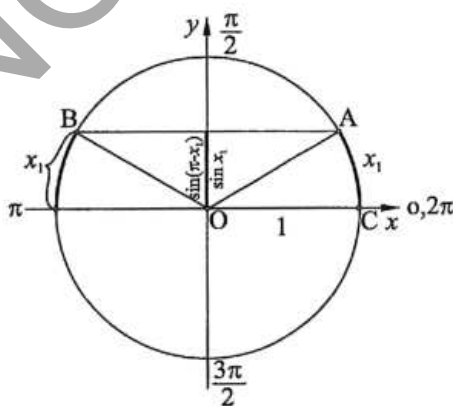
Со различни трансформации и смени, равенките од видот $f(\sin x, \cos x) = 0$ ги доведуваме до основните тригонометриски равенки:

$$\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a.$$

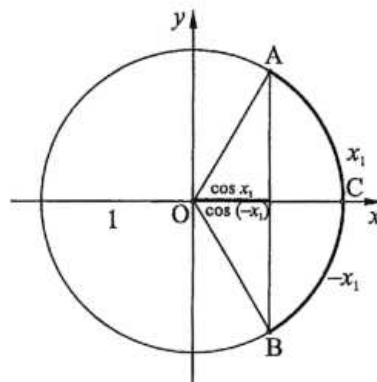
Да се потсетиме на решавањето на основните тригонометриски равенки. Функцијата $y = \sin x$ е монотонно растечка во интервалот $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, па во тој интервал равенката $\sin x = a$, за $-1 \leq a \leq 1$ има точно едно решение. Ако $|a| > 1$, тогаш равенката $\sin x = a$ нема решение. Дали оваа равенка има уште едно решение во интервалот $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$?

Од црт. 1 може да воочиме дека равенката има уште едно решение. Ако едното решение е x_1 , тогаш второто ќе биде $x_2 = \pi - x_1$.

До истиот заклучок можеме да дојдеме и за равенката $\cos x = a$, за $-1 \leq a \leq 1$. Разгледуваната равенка има едно решение на интервалот $[0, \pi]$, на кој функцијата $\cos x$ е монотонно опаѓачка. Другото решение на интервалот $[0, 2\pi]$, ако првото е x_1 , е $x_2 = -x_1$ (црт. 2). Ако $|a| > 1$, тогаш равенката $\cos x = a$ нема решение.



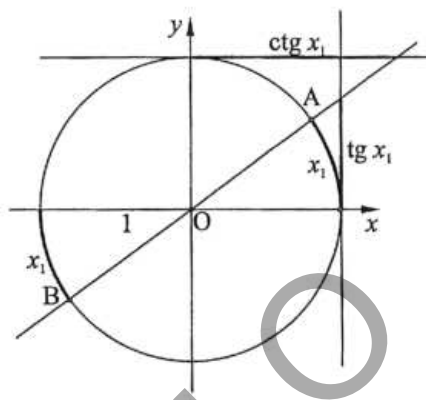
црт. 1



црт. 2

Равенката $\operatorname{tg} x = a$, за секој реален број a има единствено решение на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а равенката $\operatorname{ctg} x = a$, за секој реален број a има единствено решение x на интервалот $(0, \pi)$ (црт. 3).

Земајќи ја предвид периодичноста на тригонометриските функции ги наоѓаме сите решенија, и тоа за синус и косинус со додавање $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, на основните решенија x_1 и x_2 , што сме ги добиле, а за тангенс и котангенс со додавање на $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, на основното решение x . Со други зборови решенијата на равенките $\sin x = a$ и $\cos x = a$ се: $x = x_1 + 2k\pi$, $x = x_2 + 2k\pi$, а на равенките $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$, решенијата се $x = x_1 + k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$.



црт. 3

А) Хомогени тригонометриски равенки по $\sin x$ и $\cos x$

Пример 1 Реши ја равенката $2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Решение. Равенката е хомогена во однос на $\sin x$ и $\cos x$. Равенката може да ја поделиме со $\sin^2 x$ или $\cos^2 x$. Ако ја поделиме со $\cos^2 x$ добиваме:

$$2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0, \text{ односно } 2t^2 + t - 3 = 0 \text{ за } t = \operatorname{tg} x.$$

Корените на оваа равенка се

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}, \text{ т.е. } t_1 = 1, t_2 = -\frac{3}{2}.$$

Тогаш, од $\operatorname{tg} x = 1$, добиваме $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; од $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{2}$, добиваме $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

каде $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$.

Решенијата на дадената равенка се: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ и $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, каде $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$, $\alpha = 56^\circ 53'$, пресметан со калкулатор.

Заклучок: Хомогените тригонометриски равенки по $\sin x$ и $\cos x$ се решаваат со деленје на двете нивни страни со $\sin^2 x$ или $\cos^2 x$. Притоа се добива квадратна равенка по $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$.



Б) Тригонометриски равенки чии страни се рационални функции на тригонометриски функции

Пример 2 Реши ја равенката $\sin x + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 2$.

Решение. Левата страна на дадената равенка е рационална функција од своите аргументи $\sin x$ и $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. Воведуваме смена $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, за $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, односно $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогаш

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1}{t}, \text{ при } t \neq 0.$$

За воведената смена добиваме рационална равенка по t :

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{t} = 2, \text{ еквивалентна на } 2t^2 + 1 + t^2 = 2t^3 + 2t, \text{ т.е. } 2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0, t \neq 0.$$

Не е тешко да се воочи дека едно решение на равенката е $t=1$. Ако полиномот $2t^3 - 3t^2 + 2t - 1$ го поделеме со $t-1$ добиваме $2t^2 - t + 1$. Значи равенката $2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0$ може да се запише во вид $(t-1)(2t^2 - t + 1) = 0$.

Квадратната равенка $2t^2 - t + 1 = 0$ нема реални решенија (нејзината дискриминанта е негативна). Значи $t=1$ е единствено решение на равенката од трет степен. Притоа, од $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, добиваме $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ($\frac{\pi}{2} + 2k\pi \neq (2k+1)\pi$). Значи решенија на почетната равенка се: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Заклучок: Тригонометриските равенки од видот на погоре разгледаните може да се доведат во облик на рационални равенки со смената за $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Притоа тригонометриските функции се изразуваат како рационални функции по t како што следува:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

В) Равенки од видот $a \sin x + b \cos x = c$

Пример 3 Реши ја равенката $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$.

Решение. Равенката можеме да ја решиме на два начини.

I начин: Левата страна на равенката може да ја претставиме како синус од разлика на два агли, ако прво двете страни на равенката ги делиме со 2; $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}$, а потоа ги искористиме равенствата $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$ и $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$. Така се добива равенката $\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, т.е. $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, чиешто решенија се $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и $x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, т.е. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ и $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

II начин: Воведуваме смена $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, со t определено за $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, и ги користиме формулите $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ и $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. На тој начин се добива равенката $\sqrt{3} \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$, еквивалентна на $2\sqrt{3}t - 1 + t^2 = 1 + t^2$, чиешто решение е $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Значи, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

За вредностите на $x = (2k+1)\pi$ кои беа исклучени за променливата t , непосредно проверуваме дали се решенија на дадената равенка:

$$\sqrt{3} \sin(2k\pi + \pi) - \cos(2k\pi + \pi) = \sqrt{3} \sin \pi - \cos \pi = 1.$$

Значи добиваме дека и $x = (2k+1)\pi$ е решение на дадната равенка, т.е. $\{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x = (2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ е множеството решенија на разгледуваната равенка.

Равенката од видот $a \sin x + b \cos x = c$, каде барем еден од броевите a или b е различен од нула, може да се запише како синус или косинус од збир или разлика на агли. Имено, ваквата равенка ако ја поделиме со $\sqrt{a^2 + b^2}$ добиваме:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ и притоа } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1,$$

или, еквивалентно,

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = c.$$

Ако во последната равенка замениме:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$$

добиваме $\sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cdot \cos \alpha + \cos x \cdot \sin \alpha) = c$ т.е. $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha) = c$.

Заклучок: Равенките $a \sin x + b \cos x = c$ (каде што a и b се различни од нула) може да се решат или со запишување на левата страна како синус или косинус од збир или разлика на два агли, или со воведување на смената $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, при $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Г) Тригонометриски равенки кои ги содржат само изразите

$$\boxed{\sin x + \cos x} \text{ и } \boxed{\sin x \cdot \cos x} \text{ или } \boxed{\sin x - \cos x} \text{ и } \boxed{\sin x \cdot \cos x}.$$

Во равенките од овој вид воведуваме смена: $t = \sin x + \cos x$ ($t = \sin x - \cos x$). Имајќи ги предвид равенствата

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

може да воочиме дека $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$. Изразот $\sin x \cdot \cos x$ ќе го изразиме преку t на тој начин што равенството $t = \sin x + \cos x$ го квадрираме и притоа добиваме:

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = t^2, \text{ т.е. } \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Пример 4 Решај ја равенката $\sin x + \cos x = \sin x \cdot \cos x - 1$.

Решение. Воведуваме смена $t = \sin x + \cos x, |t| \leq \sqrt{2}$. Тогаш, согласно погорните укажувања се добива равенката $t = \frac{t^2 - 1}{2} - 1$, т.е. $t^2 - 2t - 3 = 0$, чиешто корени се $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4}$, $t_1 = 3$, $t_2 = -1$. Притоа, само $t = -1 \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Бидејќи $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ имаме $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$, односно $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогаш $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ или $x + \frac{\pi}{4} = \pi - (-\frac{\pi}{4}) + 2k\pi$ така што

$$\{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

е множеството решенија на равенката.

Пример 5 Без посебен коментар следат решенијата на равенките:

а) $8^{\sin x} = 2^{\sqrt{3} \cos x}$,

а) $2^{3 \sin x} = 2^{\sqrt{3} \cos x}$

$3 \sin x = \sqrt{3} \cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

б) $\lg 2 + \lg(1 + \cos x) + \lg(1 - \cos x) = 0.$

б) $\lg 2 + \lg(1 + \cos x) + \lg(1 - \cos x) = 0$

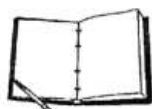
$\lg 2(1 + \cos x)(1 - \cos x) = 0$

$10^0 = 2(1 - \cos^2 x)$

$1 = 2 \sin^2 x$

$\frac{1}{2} = \sin^2 x, \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$



Задачи за самостојна работа

Решете ги равенките:

1. $\cos^2 x + 3 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 0.$

2. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$

3. $\sqrt{2} \sin 2x + \sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{3}.$

4. $\sin 2x + 2(\sin x + \cos x) + 2 = 0.$

5. $\cos^2 x - 3 \cos^2 \frac{x}{2} = -2.$

6. а) $16^{\sin x} = \sin x \sqrt{4},$

б) $3^{\lg 2x} \cdot 3^{\operatorname{ctg} 3x} = 0,$

в) $\lg(8 + 2 \sin x) - \lg(3 + \sin x) = \lg 3,$

г) $2 \log_3^2 \operatorname{ctg} x - 3 \log_3 \operatorname{ctg} x + 1 = 0.$

5.4. Систем од две експоненцијални, две логаритамски или две тригонометриски равенки со две непознати

Составот од две експоненцијални (логаритамски или тригонометриски равенки) со две исти реални непознати за кои се бараат заеднички решенија се нарекува систем од две експоненцијални (логаритамски, тригонометриски) равенки со две непознати.

Решение на систем од две експоненцијални (логаритамски, тригонометриски) равенки со две непознати е секој подреден пар од реални броеви (x, y) кој истовремено е решение на двете равенки во системот.

Множеството решенија на системот се состои од сите подредени парови (x, y) кои се решенија на двете равенки на системот, поточно, ако со R_1 го означиме множеството

решенија на едната равенка на системот, а со R_2 множеството решенија на втората равенка на системот, тогаш $R = R_1 \cap R_2$ е множеството решенија на системот.

Два системи, од две експоненцијални (логаритамски, тригонометриски) равенки со две непознати, се еквивалентни ако имаат еднакви множества решенија.

Значи, ако некоја од равенките на дадениот систем се замени со еквивалентна равенка на неа, се добива систем равенки еквивалентен на дадениот.

Со неколку примери ќе го илустрираме решавањето на систем од две експоненцијални (логаритамски, тригонометриски) равенки со две непознати.

Пример 1 Реша ги системите експоненцијални равенки:

$$\text{а) } \begin{cases} 2^{x+y-1} = 16 \\ 3^{x-y+1} = 9 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3^{x+3y} \cdot 9^{2x+y} = \frac{1}{9} \\ 5^{3x+y} \cdot 25^{y-9} = \frac{1}{125} \end{cases}$$

Решение. а) Системот $\begin{cases} 2^{x+y-1} = 16 \\ 3^{x-y+1} = 9 \end{cases}$ е еквивалентен со системот $\begin{cases} 2^{x+y-1} = 2^4 \\ 3^{x-y+1} = 3^2 \end{cases}$ од каде го

добиваме системот $\begin{cases} x+y-1=4 \\ x-y+1=2 \end{cases}$, односно добивме систем од две линеарни равенки со две непознати, чие решение е подредениот пар $(x, y) = (3, 2)$. Значи, едноелементното множество $\{(3, 2)\}$ го претставува множеството решенија на системот.

$$\text{б) } \begin{cases} 3^{x+3y} \cdot 9^{2x+y} = \frac{1}{9} \\ 5^{3x+y} \cdot 25^{y-9} = \frac{1}{125} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+3y} \cdot 3^{2(2x+y)} = 3^{-2} \\ 5^{3x+y} \cdot 5^{2(y-9)} = 5^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+3y+4x+2y} = 3^{-2} \\ 5^{3x+y+2y-18} = 5^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{5x+5y} = 3^{-2} \\ 5^{3x+3y-18} = 5^{-3} \end{cases}$$

Последниот од низата еквивалентни системи се сведува на системот од две линеарни равенки со две непознати

$$\begin{cases} 5x + 5y = -2 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$$

којшто очигледно е противречен. Значи дадениот систем од две експоненцијални равенки со две непознати нема решение, т.е. празното множество е множеството решенија на системот.

Пример 2 Реша ги системите логаритамски равенки со две непознати:

$$\text{а) } \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \lg x + \lg y^2 = 9 \\ \lg x^3 - \lg y^2 = -5 \end{cases}$$

Решение. а) Ако во системот:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$$

ги собереме двете равенки ќе добиеме $2\log_2 x = 4$, т.е. $\log_2 x = 2$, чиешто решение е $x = 4$.

Замената на x со 4 во првата дава:

$$\log_2 4 + \log_2 y = 3 \Leftrightarrow 2\log_2 2 + \log_2 y = 3 \Leftrightarrow \log_2 y = 1; y = 2.$$

Значи решението на системот е подредениот пар $(x, y) = (4, 2)$; $\{(4, 2)\}$ е множеството решенија на системот.

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \begin{cases} \lg x + \lg y^2 = 9 \\ \lg x^3 - \lg y^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x + 2 \lg y = 9 \\ 3 \lg x - 2 \lg y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x + 2 \lg y = 9 \\ 4 \lg x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x + 2 \lg y = 9 \\ \lg x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x + 2 \lg y = 9 \\ x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 \lg y = 9 \\ x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg y = 4 \\ x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10000 \\ x = 10 \end{cases}. \end{aligned}$$

Значи решение на дадениот систем е подредениот пар $(x, y) = (10, 10000)$; $\{(10, 10^4)\}$ е множеството решенија на системот.

Пример 3 Реши ги системите тригонометриски равенки:

$$\text{а)} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ \sin x + \sin y = 2 \end{cases} \quad \text{б)} \quad \begin{cases} 3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} y = 5 \\ 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$$

Решение. а) $\begin{cases} x - y = 0 \\ \sin x + \sin y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sin x + \sin y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2 \sin x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Значи, $\left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ е множеството решенија на системот.

$$\text{б)} \quad \begin{cases} 3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} y = 5 \\ 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1 \end{cases} \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} y = 5 \\ 4 \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg} y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} y = 5 \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} y = 5 \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2 \operatorname{tg} y = 5 \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} y = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} + n\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Значи, $\left\{ \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$ е множеството решенија на системот.



Задачи за самостојна работа

Реши ги следниве системи равенки:

$$\text{1. а)} \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{2} \right)^{y-x} = 128 \\ 32^{y-x+1} = \frac{1}{27} \end{cases},$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} 3^{xy} = 27 \\ \left(\frac{1}{11} \right)^{x-y} = 121 \end{cases},$$

$$\text{в)} \quad \begin{cases} 3^x + 2^y = 17 \\ 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = -6 \end{cases}.$$

$$2. a) \begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 3 \\ x + y = 10 \end{cases},$$

$$б) \begin{cases} xy = 100 \\ y \lg x = 10 \end{cases}.$$

$$3. a) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \cos x - \cos y = \sqrt{2} \end{cases},$$

$$б) \begin{cases} \sin x - \cos y = 0 \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1 \end{cases},$$

$$в) \begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 3 \\ x - y = \pi \end{cases}.$$

5.5. Линеарни и квадратни неравенки

Неравенките од прв степен (линеарни неравенки) со една реална променлива x по пренесувањето на сите членови на левата страна и нивно сведување го добиваат видот:

$$ax + b < 0 \text{ или } ax + b > 0, \text{ каде што } a \neq 0 \quad (1)$$

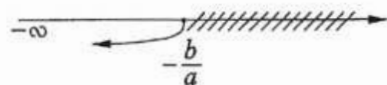
или се сведуваат на бројни изрази

$$b < 0 \text{ или } b > 0 \quad (2)$$

коишто се вистинити или не. Во случајот на вистинит исказ, почетната неравенка има множество решенија еднакво на множеството $\mathbb{R}$ од реални броеви; во случајот на неистинит исказ, празното множество е множеството решенија на неравенката. Затоа од посебен интерес е случајот $a \neq 0$. Не губејќи од општоста може да сметаме дека кај неравенките (1) е $a > 0$. Ако е $a < 0$, тогаш множејќи ги двете страни на неравенката со -1 и променувајќи го знакот на неравенството во спротивен, едниот вид од неравенките (1) преминува во другиот вид.

Со префрлување на слободниот член b од левата на десната страна (со променет знак) и делење на двете страни со $a > 0$ добиваме дека:

а) Неравенката $ax + b < 0$ при $a > 0$ е еквивалентна на неравенката $x < -\frac{b}{a}$, чие решение е секој реален број x помал од $-\frac{b}{a}$. Значи, нејзино множество решенија е интервалот $(-\infty, -\frac{b}{a})$ (црт. 1).



црт. 1



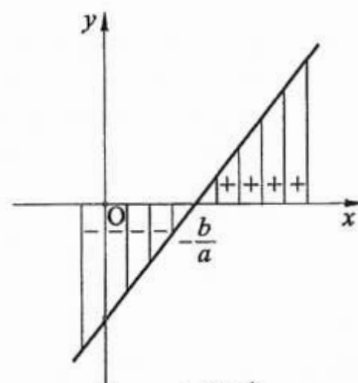
црт. 2

б) Неравенката $ax + b > 0$ при $a > 0$ е еквивалентна со неравенката $x > -\frac{b}{a}$. Значи, нејзиното множество решенија е $(-\frac{b}{a}, \infty)$. (црт. 2).

Добиените резултати ја имаат следнава проста геометрирска интерпретација: Да ја разгледаме линеарната функција $y = ax + b$, $a > 0$. Знаеме, нејзиниот график е права, која со позитивната насока на x -оската образува остар агол

α каде што $\operatorname{tg} \alpha = a$ и ја сече оската во точката $x = -\frac{b}{a}$ (црт. 3). Очигледно е дека на лево од точката $-\frac{b}{a}$

функцијата $y = ax + b$, $a > 0$ прима негативни вредности, а на десно од таа точка функцијата прима позитивни вредности.



црт. 3

Пример 1 Респи ја неравенката $\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} > 1 - \frac{2x-1}{4}$.

Решение. Ги множиме двете страни со 12 (најмалиот заеднички содржател за 2,3 и 4) и добиваме еквивалентна неравенка (која има исто множество решенија со појдовната неравенка):

$$6(x+1) - 4x > 12 - 3(2x-1), \text{ или } 2x+6 > 15-6x. \text{ Оттука } 8x > 9, \text{ односно } x > \frac{9}{8}.$$

Значи, $(\frac{9}{8}, \infty)$ е множеството решенија на разгледуваната неравенка.

Пример 2 Респи ја неравенката $x - \frac{a}{1-a} < 1 - \frac{x-1}{a-1}$, $a \neq 1$.

Решение. За параметарот $a \neq 1$ постојат две можности $a < 1$ или $a > 1$.

1) Ако $a < 1$, множејќи ги двете страни на неравенката со позитивниот број $1-a$ ја добиваме неравенката $x(1-a) - a < (1-a) + (x-1)$ или $x - ax - a < -a + x$, односно $-ax < 0$.

Оттука следува: ако $a < 0$, тогаш $-a > 0$, па добиваме $x < 0$; ако, пак, $a > 0$, но $a < 1$, тогаш имаме $x > 0$.

Ако $a = 0$, тогаш добиваме противречност $0 < 1$ што значи дека дадената равенка нема решенија (има празно множество решенија).

2) Ако $a > 1$, двете страни на равенката ги множиме со негативниот број $1-a$, па ја добиваме неравенката $x(1-a) - a > 1-a + (x-1)$, т.е. $x - ax - a > 1-a + x - 1$, или $-ax > 0$. Оттука, бидејќи по услов е $a > 1$, добиваме $x < 0$.

Според тоа, ако $a < 0$ или $a > 1$, тогаш е $x < 0$, т.е. интервалот $(-\infty, 0)$ е множество решенија на неравенката; ако $0 < a < 1$, тогаш е $x > 0$, т.е. неравенката има множество решенија $(0, \infty)$; ако, пак, $a = 0$, тогаш неравенката нема решенија, т.е. множеството решенија е празно множество.

Секоја неравенка со една променлива, која се сведува на еквивалентна неравенка од видот

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c < 0, a \neq 0 \quad (3)$$

се нарекува квадратна неравенка со една непозната.

Не губејќи од општоста може да претпоставиме дека $a > 0$. Решавањето на квадратните неравенки (3) се сведува на решавање на квадратна равенка во полето од реални броеви,

$$ax^2 + bx + c = 0, a > 0 \quad (4)$$

и наоѓање на интервалите на променливата x во кои квадратниот трином

$$ax^2 + bx + c, a > 0 \quad (5)$$

добива позитивни, односно негативни вредности.

Притоа, можни се различни случаи во зависност од знакот на дискриминантата $D = b^2 - 4ac$ на квадратната равенка (4), односно квадратниот трином (5).

1) Нека $D > 0$. Тогаш квадратната равенка (4) има два различни реални корени $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, па квадратниот трином може да се претстави во видот

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (6)$$

и притоа $x_1 < x_2$. Тогаш очигледно е дека корените x_1 и x_2 бројната оска ја разделуваат на три интервали во кои триномот има вредности со ист предзнак:

$$(-\infty, x_1), (x_1, x_2), (x_2, \infty).$$

Да го испитаме знакот на квадратниот трином (5) одделно во секој од тие три интервали:

а) Нека $x \in (-\infty, x_1)$ т.е. $-\infty < x < x_1$. Тогаш истовремено $x < x_1$, што значи дека $x - x_1 < 0$ и $x - x_2 < 0$ и оттука $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ што заедно со претпоставката $a > 0$ значи дека на интервалот $(-\infty, x_1)$ квадратниот трином (5) прима позитивна вредност. Тогаш $(-\infty, x_1)$ е подмножество од множеството решенија на неравенката

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Очигледно, ниеден број од овој интервал не е решение на неравенката

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad a > 0.$$

б) Нека $x \in (x_1, x_2)$, т.е. $x_1 < x < x_2$. Значи, $x - x_1 > 0$ но, $x - x_2 < 0$ и затоа $(x - x_1)(x - x_2) < 0$. Оттука, согласно претпоставката $a > 0$ следува дека x не е решение на неравенката $ax^2 + bx + c > 0$, но е решение на неравенката

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

в) Нека $x \in (x_2, \infty)$, т.е. $x_2 < x < +\infty$. Значи, $x_1 - x_2 > 0$, и уште повеќе $x - x_1 > 0$. Затоа, $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ што значи дека секој x е решение на неравенката $ax^2 + bx + c > 0$ и не е решение на неравенката $ax^2 + bx + c < 0$.

Дефинитивно, $M = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ е множеството решенија на неравенката $ax^2 + bx + c > 0$, $a > 0$; $M = (x_1, x_2)$ е множеството решенија на неравенката $ax^2 + bx + c < 0$, $a > 0$, ако $D = b^2 - 4ac > 0$.

2) Нека $D = 0$. Во овој случај квадратниот трином (5) има двократна нула, т.е. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ така што

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \quad (7)$$

Бидејќи (по претпоставка) $a > 0$ и за секои реални броеви x , x_1 важи $(x - x_1)^2 \geq 0$ ($(x - x_1)^2 = 0$ ако и само ако $x = x_1$) заклучуваме дека множеството решенија на неравенката $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) е $M = (-\infty, x_1) \cup (x_1, +\infty)$ додека неравенката $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) нема ниедно решение, т.е. нејзиното множество решенија е $M = \emptyset$.

3) Нека $D < 0$. Од каноничната форма на квадратниот трином,

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-D}}{2a} \right)^2 \right] \quad (a > 0)$$

се гледа дека за секоја реална вредност на x тој прима позитивна вредност што значи дека

$M = \mathbb{R}$ е множеството решенија на неравенката $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$);

$M = \emptyset$ е множеството решенија на неравенката $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$).

Често се среќаваме и со неравенки од видот:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{и} \quad ax^2 + bx + c \leq 0. \quad (9)$$

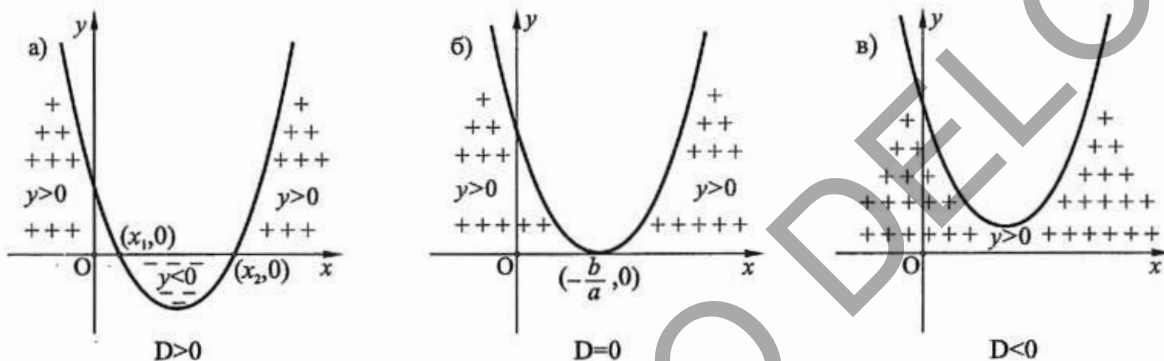
Овие неравенки се разликуваат од квадратните неравенки (3) само во тоа што на множеството од нивните решенија му припаѓаат и нулите на квадратниот трином $ax^2 + bx + c$, ако постојат.

Добиените резултати од горниве разгледувања имаат едноставна геометричка интерпретација:

Да ја разгледаме функцијата $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Нејзиниот график е парабела, чија оска е паралелна со Oy -оската и отворот на гранките нагоре.

Ако $D > 0$, тогаш параболата ја сече Ox -оската во две точки x_1 и x_2 (црт. 4а). Делот на параболата под x -оската има негативни ординати, т.е. одговара на негативните вредности на триномот, додека деловите над x -оската имаат позитивни ординати, т.е. одговараат на позитивните вредности на триномот.

Гледаме, делот од параболата што се наоѓа меѓу точките x_1 и x_2 лежи под Ox -оската, а деловите што се наоѓаат на лево од x_1 и на десно од x_2 лежат над Ox -оската (црт. 4а).



црт. 4

Ако $D = 0$, тогаш параболата само ја допира x -оската во точката $(-\frac{b}{a}, 0)$, а сите други нејзини точки имаат позитивни ординати кои одговараат на позитивните вредности на триномот (црт. 4б).

Ако $D < 0$, тогаш параболата е над x -оската, т.е. сите нејзини точки имаат позитивни ординати што значи дека триномот прима позитивни вредности за сите вредности на $x \in (-\infty, +\infty)$ (црт. 4в).

Пример 3 Решете ги квадратните неравенки:

а) $4x^2 - x + 24 > 0$, б) $-x^2 + 4x + 5 < 0$.

Решение. а) Дискриминантата е $D = 1 - 4 \cdot 4 \cdot 24 < 0$. Бидејќи $a = 4 > 0$ и $D < 0$, затоа квадратниот трином $4x^2 - x + 24$ добива позитивни вредности за секој $x \in \mathbb{R}$. Според тоа, множеството решенија на неравенката $4x^2 - x + 24 > 0$ е множеството $\mathbb{R}$ на сите реални броеви.

б) Дадената неравенка ја множиме со -1 и добиваме нејзина еквивалентна неравенка $x^2 - 4x - 5 > 0$, во која е $a = 1 > 0$ и $D = 16 + 20 = 36 > 0$. Значи, квадратниот трином $x^2 - 4x - 5$ има две различни нули, $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, и добива позитивни вредности во интервалите $(-\infty, -1)$ и $(5, \infty)$. Значи, унијата на овие два интервали го претставува множеството решенија на неравенката.

Пример 4 Решете ги квадратните неравенки $x^2 - (k+1)x + k > 0$ во која k е параметар.

Решение. Ја одредуваме дискриминантата:

$$D = (k+1)^2 - 4k = k^2 + 2k + 1 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0.$$

1) Ако $k=1$, тогаш квадратниот трином $x^2 - (k+1)x + k$ ќе има една двократна нула $x_1 = x_2 = \frac{k+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$, па според тоа дадената квадратна неравенка ќе има множество решенија $M = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ако $k \neq 1$, тогаш квадратниот трином има две различни нули $x_{1,2} = \frac{k+1 \pm \sqrt{(k-1)^2}}{2} = \frac{k+1 \pm (k-1)}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = k$.

Тука ќе разликуваме два случаја:

а) Ако $k > 1$, тогаш разгледуваната неравенка ќе има множество решенија

$$M = (-\infty, 1) \cup (k, \infty),$$

б) Ако, пак, $k < 1$, тогаш разгледуваната неравенка ќе има множество решенија

$$M = (-\infty, k) \cup (1, \infty).$$



Задачи за самостојна работа

Реша ги линеарните неравенки:

1. $5x - 7 > x + 17$.

4. $x(x^2 - 1) + 3x^2 - 5 < (x+1)^3 - \frac{5}{2}x$.

2. $x - (2 - x) < 3x + 7$.

5. $2(a - x) < ax + 5$.

3. $\frac{x-5}{2} - 3 > \frac{3x-2}{6}$.

6. $\frac{a}{2} - \frac{2-x}{3} < a-1$.

7. За кои вредности на x квадратниот трином добива позитивни вредности:

а) $3x^2 - 5x - 2$,

б) $16x^2 - 24x + 9$,

в) $-x^2 + x + 6$.

Реша ги квадратните неравенки:

8. $x^2 - 5x + 6 < 0$.

9. $x^2 - 2x > 0$.

10. $x^2 + 2x - 3 \geq 0$.

11. $x^2 - 2x > 3(x-1)$.

12. $\frac{2x^2-3}{2} - \frac{x^2+3}{4} > 3$.

5.6. Систем линеарни и квадратни неравенки

Нека $a_i \neq 0$, $i=1,2,\dots,n$, и b_i , $i=1,2,\dots,n$ се дадени реални броеви и x е реална променлива. Тогаш барањето вредност $\bar{x}$ на x за која истовремено се исполнети неравенствата:

$$a_1 \bar{x} + b_1 > 0$$

$$a_2 \bar{x} + b_2 > 0$$

.....

.....

$$a_n \bar{x} + b_n > 0$$

значи наоѓање решение на системот линеарни неравенки:

$$\begin{cases} a_1(x) + b_1 > 0 \\ a_2(x) + b_2 > 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_n(x) + b_n > 0 \end{cases} \quad (1)$$

којшто може да се запише во вид

$$a_i x + b_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1')$$

Решавање на системот (1) значи наоѓање на множеството од сите негови решенија. Забележуваме дека не претставува рестрикција изборот на знакот „>“ во системот (1) бидејќи секоја неравенка од типот „<“ помножена со (-1) дава еквивалентна неравенка од типот „>“.

Во врска со множеството решенија на (1) од интерес се следниве три случаи:

а) Сите коефициенти пред x во (1) се позитивни, т.е. $a_i > 0$ за $i = 1, 2, \dots, n$.

Во ваква ситуација системот (1) е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x > -\frac{b_1}{a_1} \\ x > -\frac{b_2}{a_2} \\ \dots\dots\dots \\ x > -\frac{b_n}{a_n} \end{cases} \quad \left(\text{кратко } x > -\frac{b_i}{a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \right) \quad (2)$$

така што секое заедничко решение на сите неравенки, т.е. секое решение на системот (2)

(и (1)) мора да е поголемо од најголемиот од броевите $-\frac{b_i}{a_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нека

$$\alpha = \max \left\{ -\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, \dots, -\frac{b_n}{a_n} \right\}.$$

Тогаш, интервалот $(\alpha, +\infty)$ претставува множество решенија на (2).

б) Сите коефициенти пред x во (1) се негативни, т.е. $a_i < 0$ за $i = 1, 2, \dots, n$.

Во овој случај системот (1) е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x < -\frac{b_1}{a_1} \\ x < -\frac{b_2}{a_2} \\ \dots\dots\dots \\ x < -\frac{b_n}{a_n} \end{cases} \quad \left(\text{кратко } x < -\frac{b_i}{a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \right) \quad (3)$$

и оттука се гледа дека секое решение на (3) (и на (1)) е број помал од најмалиот од броевите $-\frac{b_i}{a_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нека

$$\beta = \min \left\{ -\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, \dots, -\frac{b_n}{a_n} \right\}.$$

Тогаш, интервалот $(-\infty, \beta)$ претставува множество решенија на (3).

в) Во системот (1) коефициентите пред x во k ($k < n$) неравенки се позитивни, а во $n - k$ неравенки се негативни.

Може да се претпостави, без губење на општоста дека

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_k > 0, a_{k+1} < 0, \dots, a_n < 0$$

(или, кратко $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, k, a_{k+1} < 0, i = k + 1, \dots, n$). Тогаш системот (1) е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x > -\frac{b_1}{a_1} \\ x > -\frac{b_2}{a_2} \\ \dots\dots\dots \\ x > -\frac{b_k}{a_k} \\ x < -\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} \\ \dots\dots\dots \\ x < -\frac{b_n}{a_n} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Притоа, нека } \alpha = \max\left\{-\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, \dots, -\frac{b_k}{a_k}\right\}, \text{ а } \beta = \min\left\{-\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}, \dots, -\frac{b_n}{a_n}\right\}.$$

Ако постои решение на (4) (и на (1)), тогаш тоа е број поголем од α и помал од β . Ваков број постои само ако $\alpha < \beta$ и тогаш секој број $x, \alpha < x < \beta$ претставува решение на (4) (и на (1)), т.е. интервалот (α, β) е множеството решенија на системот (1).

Ако $\alpha \geq \beta$, тогаш не постои ниедно решение на системот (4) (и на (1)) што значи дека множеството решенија е празното множество.

Пример 1 Решете го системот неравенки

$$\begin{cases} 8x - 5 > \frac{15x - 8}{2} \\ 5x - 3 < 2(2x - 3) \\ 3x + 1 < 2\left(x - \frac{5}{2}\right) \\ 3x + 12 > 2x + 5 \end{cases} \quad (5)$$

Решение: По ослободувањето од именителите, заградите, пренесување на членовите со променлива на левата страна, а без променлива на десната страна и редукцијата на членовите со x системот (5) го добива видот:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < -3 \\ x < -6 \\ x > -7 \end{cases}$$

Очигледно, секое решение на овој систем би требало да е број поголем од $2 = \max\{2, -7\}$ и помал од $-6 = \min\{-3, -6\}$. Бидејќи не постои таков реален број, системот е противречен, т.е. има празно множество решенија.

Пример 2 Реши ја вкупноста од системите неравенки (најди ги сите реални броеви кои претставуваат решенија на барем еден од системите):

$$\begin{cases} 7x - 6 < 3x + 2 \\ x + 4 > 4x + 1 \\ 2x - 1 < x + 7 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} 3x + 1 > 10 \\ 5x + 2 > 2x - 7 \\ 6x + 2 > -2x + 10. \end{cases}$$

Решение: Првиот систем неравенки е еквивалентен на системот $\begin{cases} x < 2 \\ x < 1, \text{ и притоа} \\ x < 8 \end{cases}$

$1 = \min\{2, 1, 8\}$. Значи секој $x < 1$ претставува решение, т.е. множеството решенија на првиот систем е интервалот $M_1 = (-\infty, 1)$.

Вториот систем неравенки е еквивалентен на системот неравенки $\begin{cases} x > 3 \\ x > -3, \text{ и притоа} \\ x > 1 \end{cases}$

$3 = \max\{3, -3, 1\}$. Значи, секој $x > 3$ претставува решение, т.е. множеството решенија на вториот систем е интервалот $M_2 = (3, \infty)$.

Множеството решенија на вкупноста (6) е еднакво на унијата од интервалите M_1 и M_2 , т.е. $M = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Пример 3 Реши ја двојната неравенка $1 < 3x - 5 < 4$.

Решение. Дадената неравенка го претставува системот неравенки $\begin{cases} 1 < 3x - 5 \\ 3x - 5 < 4 \end{cases}$ кој е

еквивалентен со системот $\begin{cases} 3x > 6 \\ 3x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases}$. Значи, интервалот $M = (2, 3)$ е множеството решенија на двојната неравенка.

Пример 4 Реши го системот неравенки:

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 + 5x + 4 > 0. \\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

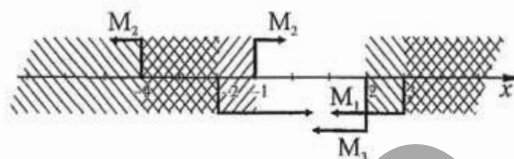
Решение. Прво ја решаваме одделно секоја неравенка во системот. Триномот $x^2 - x - 6$ од првата неравенка има $D = 1 + 24 > 0, a = 1 > 0$, и нули: $x_1 = -2, x_2 = 3$. Затоа добива негативни вредности само во интервалот $(-2, 3)$. Значи, првата неравенка во системот има множество решенија е $M_1 = (-2, 3)$.

За триномот од втората неравенка имаме: $D = 25 - 16 = 9 > 0$, $a = 1 > 0$, $x_1 = -4$, $x_2 = -1$.

Значи, триномот $x^2 + 5x + 4$ добива позитивни вредности за секоја вредност на x од интервалите $(-\infty, -4)$ и $(-1, \infty)$. Според тоа, втората неравенка во системот има множество решенија $M_2 = (-\infty, -4) \cup (-1, \infty)$.

Третата неравенка во системот е линеарна. Таа има множество решенија $M_3 = (-\infty, 2)$.

Решение на системот е секој број што истовремено претставува решение на секоја од трите неравенки. Значи тоа е број од пресекот на M_1 , M_2 и M_3 т.е. $M = (-1, 2)$ (црт. 1).



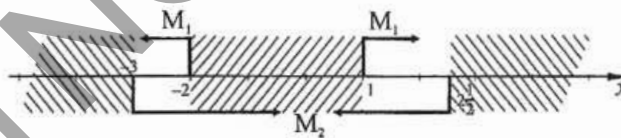
црт. 1

Пример 5 Реши го системот неравенки:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 2x^2 + x - 15 < 0 \\ 3x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases}$$

Решение. Лесно одредуваме дека: првата неравенка има множество решенија $M_1 = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$, втората- $M_2 = (-3, 2\frac{1}{2})$, а третата $M_3 = (-\infty, \infty)$, т.е. таа е задоволена за секоја реална вредност на променливата x .

Очигледно е дека штом една неравенка на системот е задоволена за секоја реална вредност на x , тогаш множеството решенија на системот ќе биде еднакво на пресекот од множествата решенија на преостанатите неравенки во тој систем. Во нашиот случај ќе биде:



црт. 2

$$M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = M_1 \cap M_2 = [(-\infty, -2) \cup (1, \infty)] \cap (-3, 2\frac{1}{2}) = (-3, 2) \cup (1, 2\frac{1}{2}) \quad (\text{црт. 2})$$

Пример 6 Реши го системот неравенки:

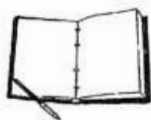
$$\begin{cases} x^2 + 1 < 0 \\ 2x^2 - 2 < 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$$

Решение. Гледаме, првата неравенка во системот нема решение (Зошто?), а со оглед на тоа што ги бараме заедничките решенија на сите неравенки во системот, може да се заклучи дека дадениот систем, исто така, нема решенија, односно бараното множество решенија на системот е $\emptyset$.

Пример 7 Да се реши вкупноста неравенки:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$$

Решение. Лесно одредуваме дека првата неравенка има множество решенија $M_1 = (-1, 2)$, а втората- $M_2 = (1, 4)$. Во тој случај бараното множество решенија на вкупноста на тие две неравенки ќе биде: $M = M_1 \cup M_2 = (-1, 2) \cup (1, 4) = (-1, 4)$.



Задачи за самостојна работа

Реши ги системите линеарни неравенки:

1.
$$\begin{cases} 2x - 1 > x - 5 \\ x + 3 < 3x - 2 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 3(x - 2) - 5 > 3 + x \\ 2(x - 1) - 3 < 2 \\ 4x > 3(x - 1) \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x - 3 > x + 1 \\ x < 2(x - 1) \\ \frac{x - 1}{2} < 3x - 5 \end{cases}$$

4. Реши ги двојните неравенки:

а) $1 < 2x - 3 < 3$,

б) $-x + 3 < x + 1 < 2x - 5$.

Реши ги системите квадратни неравенки:

5.
$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0 \\ 3x^2 - 2 < x + 8 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} (8 - x)(x - 5) < 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} -x^2 - 2x + 3 > 0 \\ 9x^2 - 6x + 1 > 0 \\ 3x^2 + x - 4 < 0 \end{cases}$$

5.7. Дробно рационални неравенки со една непозната

Дробно рационална неравенка со една непозната x се вика неравенката од видот

$$R_1(x) > R_2(x) \text{ или } R_1(x) < R_2(x) \quad (1)$$

во која левата и десната страна се рационални изрази и притоа x се содржи во именителот на барем еден од нив.

По пренесувањето на $R_2(x)$ на левата страна и доведувањето на разликата $R_1(x) - R_2(x)$ во каноничен вид, дробно рационалната неравенка (1) може да се доведе во вид

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ или } \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \quad (2)$$

каде што $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми по однос на x .

Значи, решавањето на неравенката (1) го сведуваме на решавање на нејзиниот каноничен вид (2) имајќи предвид дека дефиниционата област на неравенката (2) во општ случај може да биде и поширока од таа на дадената неравенка (1). Затоа од множеството решенија на неравенката (2) треба да се изостават оние вредности на x (ако има такви) кои не ѝ припаѓаат на дефиниционата област на неравенката (1).

Очигледно е дека потребен и доволен услов за да биде задоволена неравенката

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ (односно } \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{)} \text{ е да биде задоволен еден од следниве два услови:}$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \left(\text{односно } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \right)$$

Меѓутоа, токму тие услови претставуваат потребен и доволен услов за да биде задоволена и неравенката $f(x) \cdot g(x) > 0$ (односно $f(x) \cdot g(x) < 0$). Оттука следува дека важи следнава:

Теорема 1.

Неравенката $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (односно $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$) е еквивалентна со неравенката $f(x) \cdot g(x) > 0$ (односно $f(x) \cdot g(x) < 0$).

Забелешка. Неравенката $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ во општ случај не е еквивалентна со неравенката $f(x) \cdot g(x) \geq 0$. На пример, вредностите на x за кои важи $g(x) = 0$ се решенија на втората неравенка, но не се решенија на првата.

Согласно погорната теорема решавањето на дробно-рационалните неравенки го сведуваме на решавање на соодветна цела рационална неравенка од повисок степен.

Пример 1 Решај ја неравенката:

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1} < -1.$$

Решение: Дадената неравенка има смисла за $x \neq \pm 1$ и е еквивалентна на неравенката

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1} + 1 < 0, \text{ или } \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 1} < 0, \text{ односно на}$$

$$(2x^2 - 7x + 5)(x^2 - 1) < 0 \text{ за } x \neq \pm 1 \quad (3)$$

Ако триномот $2x^2 - 7x + 5$ и биномот $x^2 - 1$ ги разложиме на линеарни множители, неравенката (3) го добива видот:

$$2(x - 1)^2 \left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1) < 0 \quad (4)$$

Очигледно е дека при $x \neq 1$ множителот $(x - 1)^2$ е позитивен и не го менува знакот за неравенство. Ако двете страни на неравенката (4) ги поделиме со $2(x - 1)^2$ ќе ја добијеме неравенката

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1) < 0 \quad (5)$$

која е еквивалентна на дадената при условот $x \neq 1$.

Множество решенија на неравенката (5) е интервалот $(-1, \frac{5}{2})$. Со изоставување на бројот 1 го добиваме множеството решенија $M = (-1, 1) \cup (1, \frac{5}{2})$, т.е. $M = (-1, \frac{5}{2}) \setminus \{1\}$ на дадената неравенка.

Пример 2 Решај ја неравенката $\frac{6}{x-1} - \frac{3}{x+1} > \frac{7}{x+2}$.

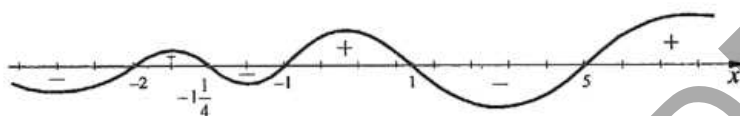
Решение: Дадената неравенка е еквивалентна на секоја од неравенките:

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{x+1} - \frac{7}{x+2} > 0, \quad \frac{-4x^2 + 15x + 25}{(x-1)(x+1)(x+2)} > 0, \quad \frac{-4(x + \frac{5}{4})(x-5)}{(x-1)(x+1)(x+2)} > 0, \quad \frac{(x + \frac{5}{4})(x-5)}{(x-1)(x+1)(x+2)} < 0,$$

односно на неравенката

$$(x + \frac{5}{4})(x-5)(x-1)(x+1)(x+2) < 0 \quad \text{за } x \neq -1, 1, -2. \quad (6)$$

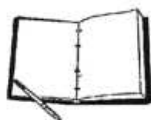
Гледаме дека левата страна на неравенката (6) е производ од пет линеарни множители, чии нули се: -2 , $-\frac{5}{4}$, -1 , 1 и 5 . Тие бројната оска (црт. 1) ја разделуваат на шест интервали $(-\infty, -2)$, $(-2, -1\frac{1}{4})$, $(-1\frac{1}{4}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 5)$, $(5, \infty)$.



црт. 1

Од цртежот 1 гледаме дека множеството решенија на неравенката (6) се состои од интервалите $(-\infty, -2)$, $(-\frac{5}{4}, -1)$, и $(1, 5)$, т.е. тоа е еднакво на унијата од нив:

$$M = (-\infty, -2) \cup (-\frac{5}{4}, -1) \cup (1, 5),$$



Задачи за самостојна работа

Реша ги неравенките

1. а) $\frac{2x-1}{x-2} < x+2,$

б) $\frac{3x^2-5x+1}{x^2+4} < 1.$

2. а) $\frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6} > 0,$

б) $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} \leq 5.$

3. а) $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} < \frac{6}{x-1},$

б) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x+1} < 2.$

4. а) $\frac{x}{x^2+7x+12} > \frac{x}{x^2+3x+2},$

б) $\frac{x+3}{x^2-5x+4} < 0.$

5. а) $\frac{x^2+6x+8}{x^2-8x+15} < 0,$

б) $-1 < \frac{x^2-2x-3}{x(3-x)+4} < 1.$

5.8. Експоненцијални неравенки и систем експоненцијални неравенки

Дефиниција 1. Неравенките во кои непознатата се јавува само во степенев показател се нарекуваат експоненцијални неравенки.

Пример 1 Експоненцијални неравенки се на пример:

$$5^x > \sqrt{5}, \quad x^{1-x} > 1, \quad (x^2 + 2)^{x+1} \leq 3.$$

Под основни експоненцијални неравенки се подразбираат неравенките:

$$a^{f(x)} < b, \quad a^{f(x)} > b, \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}.$$

Првите две основни неравенки се решаваат со логаритмирање, имајќи ја предвид монотоноста на функцијата $y = \log_a x$. Притоа,

Ако $b \leq 0$, тогаш неравенката $a^{f(x)} < b$ нема решение; додека секој број од дефиниционата област е решение на неравенката $a^{f(x)} > b$.

Ако $b > 0$, тогаш за неравенката $a^{f(x)} < b$ со логаритмирање добиваме $f(x) < \log_a b$, $a > 1$ и $f(x) > \log_a b$, $0 < a < 1$; додека за $a^{f(x)} > b$ со логаритмирање добиваме $f(x) > \log_a b$, $a > 1$ и $f(x) < \log_a b$, $0 < a < 1$.

За третиот тип на основна експоненцијална неравенка согласно монотоноста на функцијата $y = a^x$ имаме:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x), \quad a > 1$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x), \quad 0 < a < 1.$$

Пример 2 Решете ги експоненцијалните неравенки:

а) $5^x < 3$,

б) $0,7^{x^2-x} > -2$,

в) $(0,25)^{6x-x^2} \geq 0,25$,

г) $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \sqrt[3]{0,04}$,

д) $5^{\frac{2x-3}{x-2}} \geq \frac{1}{5}$,

е) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Решение. а) $5^x < 3 \Leftrightarrow x < \log_5 3$, бидејќи $a = 5 > 1$. Значи, $(-\infty, \log_5 3)$ е множеството решенија.

б) $0,7^{x^2-x} > -2$ за секое $x \in \mathbb{R}$, т.е. $(-\infty, +\infty)$ е множеството решенија.

в) $(0,25)^{6x-x^2} \geq 0,25 \Leftrightarrow 6x - x^2 \leq 1$, бидејќи $a = 0,25 < 1$,

$$x^2 - 6x + 1 \geq 0, \quad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-1}, \quad x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Множеството решенија на неравенката е унијата $(-\infty, 3 - 2\sqrt{2}) \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$.

г) Неравенката $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \sqrt[3]{0,04}$ ја запишуваме: $0,2^x < (0,2)^{\frac{2}{3}}$ од каде е $x > \frac{2}{3}$, бидејќи

$a = 0,2 < 1$. Значи, $(\frac{2}{3}, +\infty)$ е множеството решенија.

д) По претпоставка $5^{\frac{2x-3}{x-2}} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{\frac{2x-3}{x-2}} \geq 5^{-1} \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-2} \geq -1$.

$$\frac{2x-3}{x-2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3+x-2}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-5}{x-2} \geq 0$$

$$\begin{cases} 3x-5 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x-5 \leq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq \frac{5}{3} \\ x < 2 \end{cases} \quad \text{Значи } \left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \cup (2, +\infty) \text{ е множеството решенија.}$$

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Бидејќи $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$, дадената неравенка е еквивалентна со

неравенката $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$, односно $x+2 < 2x, x > 2$ бидејќи $a = \frac{1}{2} < 1$. Значи $(2, +\infty)$ е множеството решенија.

Пример 3 Репи ја неравенката:

$$\frac{3}{\sqrt{5^x-1}} + \frac{\sqrt{5^x}}{\sqrt{5^x-2}} < -3.$$

Решение. Со замената во неравенката $\sqrt{5^x} = t, t > 0$ ги добиваме еквивалентностите:

$$\frac{3}{t-1} + \frac{t}{t-2} < -3 \Leftrightarrow \frac{3t-6+t^2-t+3t^2-9t+6}{(t-1)(t-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{t(4t-7)}{(t-1)(t-2)} < 0.$$

Со решавање на системите квадратни неравенки:

$$\begin{cases} t(4t-7) > 0 \\ (t-1)(t-2) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} t(4t-7) < 0 \\ (t-1)(t-2) > 0 \end{cases}$$

добиваме: $0 < t < 1$ или $\frac{7}{4} < t < 2$ и оттука еквивалентностите:

$$0 < \sqrt{5^x} < 1 \Leftrightarrow 0 < 5^x < 1 \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{или} \quad \frac{7}{4} < \sqrt{5^x} < 2 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{4}\right)^2 < 5^x < 2^2 \Leftrightarrow 2 \log_5 \frac{7}{4} < x < 2 \log_5 2.$$

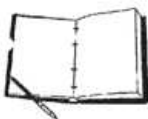
Значи решенија на дадената неравенка се броевите: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(2 \log_5 \frac{7}{4}; 2 \log_5 2\right)$.

Пример 4 Репи го системот неравенки:
$$\begin{cases} 3^{x+1} > 9 \\ (0,5)^{x-1} > \frac{1}{32} \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 3^{x+1} > 9 \\ (0,5)^{x-1} > \frac{1}{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+1} > 3^2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > \frac{1}{2^5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2 \\ 2^{1-x} > 2^{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1-x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 6 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$(1, 6)$ е множеството решенија.



Задачи за самостојна работа

Решете ги неравенките:

1. а) $6^x < 5$,

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > -4$.

2. а) $15^x > \frac{1}{\sqrt[4]{15^3}}$,

б) $\sqrt[5]{2^{x-1}} \leq 2\sqrt{2}$.

3. $(0,1)^{4x^2-2x-2} \leq 0,1^{2x-3}$,

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$.

4. а) $49^x - 5 \cdot 7^x - 14 > 0$,

б) $\frac{4^x + 2^x - 4}{x-1} \leq 2$.

5. а) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$,

б) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$.

6. Решете го системот неравенки:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} > \frac{4}{25} \\ \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{0,75x} > \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \end{cases}$$

5.9. Логаритамски неравенки и систем логаритамски неравенки

Дефиниција 1.

Неравенките во кои непознатата е само под знакот за логаритам (како аргумент или основа) се викаат логаритамски неравенки.

Пример 1

На пример, логаритамски неравенки се:

$$\log_3(x+1) > -1, \quad \log_x x - \log_x(2x-3) < 1.$$

Под основни логаритамски неравенки ќе ги подразбираме неравенките:

$$\log_a f(x) < b, \quad \log_a f(x) > b, \quad \log_a f(x) < \log_a g(x).$$

Основните логаритамски неравенки се решаваат со користење на монотоноста на функцијата $y = \log_a x$ во нејзиното дозволено множество вредности за променливата x . Значи,

$$\checkmark \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x), \text{ ако } a > 1,$$

$$\checkmark \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0, \text{ ако } 0 < a < 1.$$

Од $0 < f(x) < g(x)$ следува дека $g(x) > 0$, а од $f(x) > g(x) > 0$ имаме $f(x) > 0$. Затоа не се задржуваме на методите на решавање на овие неравенки.

Неравенките $\log_a f(x) < b$ и $\log_a f(x) > b$, земајќи предвид дека $b = \log_a a^b$, се сведуваат на решавање на неравенките:

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \log_a f(x) < \log_a a^b,$$

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a a^b.$$

Пример 2 Ресни ги неравенките:

а) $\log_5 x > \log_5 2$,

б) $\log_4(x+1) > \log_4(5-x)$,

в) $\log_{\frac{1}{7}}(2x-6) < \log_{\frac{1}{7}} x$,

г) $\log_{5,4} 2x < 1$,

д) $\log_{0,9}(4x-1) > 0$,

е) $\log_{\frac{1}{2}}(x-7) > 4$.

Решение. а) $\log_5 x > \log_5 2 \Leftrightarrow x > 2$. Значи $(2, +\infty)$ е множеството решенија.

б) Од $\log_4(x+1) > \log_4(5-x) \Leftrightarrow x+1 > 5-x > 0$ ги добиваме еквивалентните системи: $\begin{cases} x+1 > 5-x \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 5 \end{cases}$. Оттука следува дека решение на неравенката е секој $x \in (2, 5)$.

в) Од $\log_{\frac{1}{7}}(2x-6) < \log_{\frac{1}{7}} x \Leftrightarrow 2x-6 > x > 0$ ги добиваме еквивалентните системи $\begin{cases} 2x-6 > x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ x > 0 \end{cases}$. Оттука следува дека решение на неравенката е секој $x \in (6, +\infty)$.

г) Ако во неравенката ставиме $1 = \log_{5,4} 5,4$ имаме

$$\log_{5,4} 2x < \log_{5,4} 5,4 \Leftrightarrow 0 < 2x < 5,4 \Leftrightarrow 0 < x < 2,7, \quad x \in (0; 2,7)$$

д) Ако во неравенката запишеме $0 = \log_{0,9} 1$ имаме:

$$\log_{0,9}(4x-1) > \log_{0,9} 1 \Leftrightarrow 0 < 4x-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \quad x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

е) Ако во неравенката го искористиме идентитетот $4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4$ имаме:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-7) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow 0 < x-7 < \frac{1}{16} \Leftrightarrow 7 < x < 7\frac{1}{16}, \quad x \in \left(7; 7\frac{1}{16}\right).$$

Пример 3 Ресни ги неравенките:

а) $\log_2(x+1) + \log_2(11-x) < 5$,

б) $\frac{\log_5 x - 1}{\log_5 x + 2} + \frac{1}{\log_5 x} < 1$.

Решение. а) За $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 11-x > 0 \end{cases}$ имаме $-1 < x < 11$.

Од $\log_2(x+1) + \log_2(11-x) = \log_2(x+1)(11-x)$, а $5 = \log_2 2^5$, имаме:

$$\log_2(x+1)(11-x) < \log_2 2^5 \Leftrightarrow (x+1)(11-x) < 32$$

$$11x + 11 - x^2 - x < 32, \quad x^2 - 10x + 21 > 0, \quad x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 3, \quad x \in (-\infty, 3) \cup (7, +\infty).$$

Но, бидејќи $-1 < x < 11$, добиваме дека решенија на неравенката се: $x \in (-1, 3) \cup (7, 11)$.

б) Заменувајќи $\log_5 x = t$ во дадената неравенка добиваме:

$$\frac{t-1}{t+2} + \frac{1}{t} < 1 \Leftrightarrow \frac{t^2 - t + t + 2 - t^2 - 2t}{t(t+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{t-1}{t(t+2)} > 0.$$

Со решавање на системите:

$$\begin{cases} t-1 > 0 \\ t(t+2) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} t-1 < 0 \\ t(t+2) < 0 \end{cases}$$

добиваме: $t \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$, односно имаме:

$$-2 < \log_5 x < 0 \quad \text{или} \quad \log_5 x > 1$$

$$\log_5 5^{-2} < \log_5 x < \log_5 1 \Leftrightarrow \frac{1}{25} < x < 1; \log_5 x > \log_5 5 \Leftrightarrow x > 5.$$

Значи решенија на неравенката се броевите $x \in \left(\frac{1}{25}, 1\right) \cup (5, +\infty)$.

Пример 4 Реши ги неравенките:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,5}(x^2-1)} < 3,$

б) $7^{\log_{0,1}(x+1)} < 49.$

Решение. а) За $x^2 - 1 > 0$, односно $|x| > 1$ имаме:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,5}(x^2-1)} = x^2 - 1 \text{ и добиваме } x^2 - 1 < 3, x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2, x \in (-2, -1) \cup (1, 2).$$

б) $7^{\log_{0,1}(x+1)} < 7^2 \Leftrightarrow \log_{0,1}(x+1) < 2 \Leftrightarrow x+1 > 0,1^2$

$$x+1 > 0,01, x > -0,99, x \in (-0,99; +\infty)$$

Пример 5 Реши ја неравенката: $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

Решение. а) За да биде определена функцијата мора $x^2 > 0$, $2x+3 > 0$, $2x+3 \neq 1$, односно $x > -\frac{3}{2}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$.

Претпоставуваме дека $0 < 2x+3 < 1$, односно $-\frac{3}{2} < x < -1$. Тогаш го добиваме неравенството: $\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3)$, односно $x^2 > 2x+3$, односно $(x+1)(x-3) > 0$.

Со решавање на системите неравенки: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+1 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$, добиваме $x < -1$ или

$x > 3$. Но, поради условот $-\frac{3}{2} < x < -1$ добиваме дека решенија се сите броеви

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right).$$

Ако $2x+3 > 1$, односно $x > -1$ имаме: $\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3) \Leftrightarrow x^2 < 2x+3$, односно $-1 < x < 3$, па решенија на дадената неравенка се сите броеви $x \in (-1, 3)$.

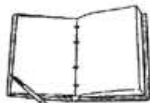
Значи множеството решенија за дадената неравенка е унијата $\left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, 3)$.

Пример 6 Реши го системот логаритамски неравенки:
$$\begin{cases} \log_2(2x-3) < \log_2 x \\ \log_3(x^2-3) < \log_3 6 \end{cases}$$

Решение. Од еквивалентностите

$$\begin{cases} \log_2(2x-3) < \log_2 x \\ \log_3(x^2-3) < \log_3 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x-3 < x \\ 0 < x^2-3 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} < x < 3 \\ \sqrt{3} < |x| < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < x < 3$$

следва дека решение на разгледуваниот систем се сите реални броеви $x \in (\sqrt{3}, 3)$.



Задачи за самостојна работа

Реши ги логаритамските неравенки:

1. а) $\log_8 x > \log_8 5$, б) $\log_{0,4} 3 \leq \log_{0,4}(2-x)$.
2. а) $\log_{\sqrt{2}}(3-2x) \geq 2$, б) $\log_1 \frac{x}{x+2} > 1$.
3. а) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$, б) $\log_6(x+8) \leq \log_6(x-3) + \log_6 3x$.
4. $5^{\log_5 x^2} + 3^{\log_3 x} \leq 4$.
5. а) $\lg^2 x - 2 \lg x - 8 \leq 0$, б) $\log_3(4^x - 5 \cdot 2^x + 3) \geq 2$.
6. Реши го системот неравенки
$$\begin{cases} \lg \frac{6}{x} > \lg(x+5) \\ \lg \frac{2}{x} > \lg(x-1) \end{cases}$$
.

5.10. Тригонометриски неравенки

Дефиниција 1. Неравенките во кои непознатата е само под знакот на тригонометриска функција, се викаат тригонометриски неравенки.

Пример 1 Тригонометриски неравенки се:

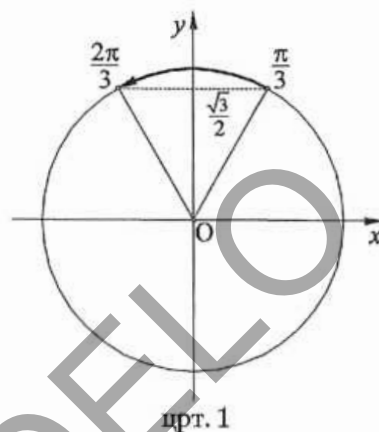
$$\sin x < \frac{1}{2}; \cos 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3}) > 2; \sqrt{3} \sin x + \cos x \geq 1 \text{ и т. н.}$$

За решавање на основните тригонометриски неравенки ќе го користиме нивното претставување на единичната тригонометриска кружница, монотоноста и периодичноста.

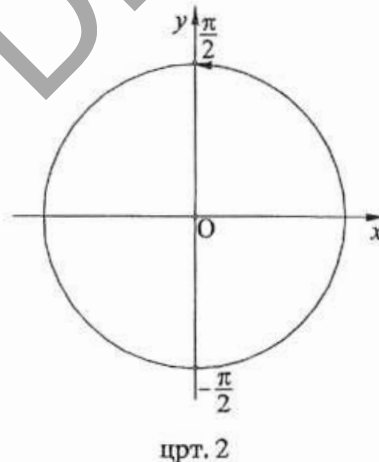
Пример 2 Реши ги неравенките:

а) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, б) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$, в) $\operatorname{ctg} 2x \leq \sqrt{3}$, г) $\operatorname{tg} x \geq 1,3$.

Решение. а) Ќе ја решиме неравенката прво во интервалот $[0, 2\pi]$. Во овој интервал (црт. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ за $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{2\pi}{3}$. Неравенството $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ е исполнето за сите x , кои го образуваат делот од кружницата k чија ордината е поголема од $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тоа се броевите $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$. Оттука, поради периодичноста на $y = \sin x$ со период 2π , решенија на дадената неравенка се сите $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.



б) Заменуваме $x + \frac{\pi}{6} = t$ и ја решаваме неравенката $\cos t > 0$. Во интервалот $[-\pi, \pi]$, решенијата (црт. 2) се броевите $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а за секое t , $t \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Оттука имаме:



$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

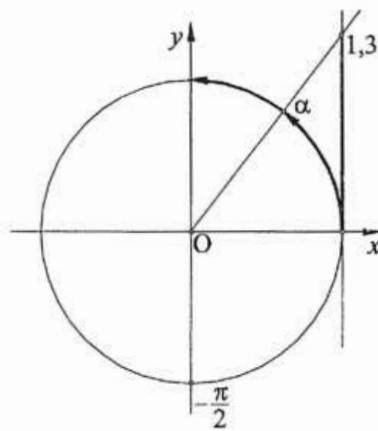
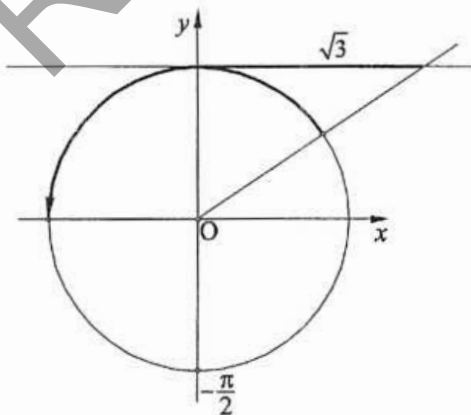
Значи решенија на дадената неравенка се сите броеви

$$x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

в) Со смената $t = 2x$ ја добиваме тригонометриската неравенка $\operatorname{ctg} t \leq \sqrt{3}$ (црт.3).

Во интервалот $(0, \pi)$ $\operatorname{ctg} t = \sqrt{3}$ за $t = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{ctg} t \leq \sqrt{3}$ за $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right)$. Решенијата на

неравенката $\operatorname{ctg} t \leq \sqrt{3}$ се броевите $t \in \left[\frac{\pi}{6} + k\pi; \pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Со заменување на $t=2x$ имаме $2x \in \left[\frac{\pi}{6} + k\pi; \pi + k\pi\right)$, односно $x \in \left[\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right)$

или $x \in \left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{6} + k\right); \frac{\pi}{2}(k+1)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

г) Решение на неравенката $\operatorname{tg} x \geq 1,3$ (црт. 4) во интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ се сите броеви $x \in \left[\alpha; \frac{\pi}{2}\right)$, каде α е аголот за кој $\operatorname{tg} \alpha = 1,3$. Тогаш решенија на неравенката се сите броеви $x \in \left[\alpha + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $\operatorname{tg} \alpha = 1,3$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3 Решај ја неравенката: $2\cos^2 x + \cos x - 1 < 0$.

Решение. Ако замениме $\cos x = t$, $|t| \leq 1$ добиваме квадратна неравенка по t , односно: $2t^2 + t - 1 < 0$. Со решавање на квадратната равенка $2t^2 + t - 1 = 0$ добиваме

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}, \quad t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = -1.$$

Неравенката по t е точна за $-1 < t < \frac{1}{2}$, односно $-1 < \cos x < \frac{1}{2}$.

Решение на двојната неравенка во интервалот $[-\pi, \pi]$ се броевите $x \in (-\pi, -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \pi)$. Оттука решенија на неравенката се:

$$x \in (-\pi + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4 Решај ја неравенката $3\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x > 1$.

Решение. Дадената неравенка е хомогена по $\sin x$ и $\cos x$:

$$3\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x > \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x > 0.$$

✓ Ако $\cos x = 0$, односно $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, тогаш ја добиваме неравенката $2\sin^2 x > 0$ и можеме да воочиме дека е точно $\sin x \neq 0$, кога $\cos x = 0$. Значи, решенија на неравенката се: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

✓ Ако $\cos x \neq 0$, односно $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ тогаш неравенката ја делиме со $\cos^2 x > 0$ и добиваме:

$$2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 > 0, \quad \operatorname{tg} x = t$$

$$2t^2 - 3t + 1 > 0, \quad t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Од $t < \frac{1}{2}$ или $t > 1$, имаме $\operatorname{tg} x < \frac{1}{2}$ или $\operatorname{tg} x > 1$.

Тогаш $\operatorname{tg} x < \frac{1}{2}$ за $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha + k\pi)$, каде $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ и

$\operatorname{tg} x > 1$ за $x \in (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5 Реши ја неравенката: $\cos x - \sqrt{3} \sin x < 1$.

Решение. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме како синус или косинус од збир или разлика на два агли. За таа цел неравенката ја делиме со $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$:

$$\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x < \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} \cos x - \cos \frac{\pi}{6} \sin x < \frac{1}{2}, \sin(\frac{\pi}{6} - x) < \frac{1}{2}$$

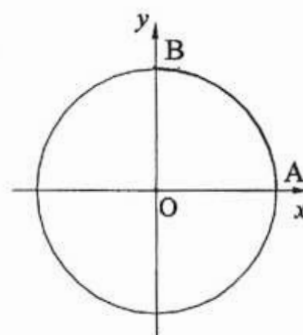
$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < \frac{\pi}{6} - x < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$-2\pi + 2k\pi < x < -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Решенија на дадената неравенка се броевите: $x \in (2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Пример 6 Реши го системот неравенки $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$.

Решение. Решението на дадениот систем од тригонометриски неравенки најлесно може да се реши со користење на единичната тригонометриска кружница (црт. 5).
Решение на неравенката $\sin x > 0$ е интервалот $0 < x < \pi$, а за неравенката $\cos x > 0$ е интервалот $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, тогаш пресек на овие два интервали го дава решението на системот, односно интервалот $0 < x < \frac{\pi}{2}$ или лакот АВ на црт. 5. Значи решение на системот се сите броеви $x \in (2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.



црт. 5



Задачи за самостојна работа

Реши ги тригонометриските неравенки:

1. а) $\operatorname{tg} x \leq 1$, б) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. а) $\sin(2x - \frac{3\pi}{4}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$, б) $\sqrt{3} \operatorname{tg}(3x + \frac{\pi}{3}) < 3$.

$$3. a) \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$б) \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$4. 2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 \geq 0,$$

$$5. \sin^2 x - 7\sin x \cos x + 12\cos^2 x < 0.$$

$$6. \sqrt{2} \sin 2x + \sqrt{2} \cos 2x < \sqrt{3}.$$

7. Решите системы неравенки:

$$a) \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0,5 \end{cases},$$

$$б) \begin{cases} \sin x < \frac{1}{2} \\ \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

5.11. Задачи за вежбање

Решите ги експоненцијалните равенки:

$$1. a) \sqrt[5]{4^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{x+8}},$$

$$б) 17^{\frac{2}{x-5}} = x \cdot \sqrt[8]{17^3}.$$

$$2. a) a^{2x-1} + a^{2x+1} = a^3 + a^5,$$

$$б) (a^{4x-1})^3 \cdot a^{x-2} = (a^{6x+5})^4 \cdot a^{x-1}.$$

$$3. a) 7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345,$$

$$б) 4^{x+3} - 13 \cdot 4^{x+1} = 2^{3x-1} - 2^{3x-3}.$$

$$4. a) 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2},$$

$$б) 7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}.$$

$$5. 2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} + 288 = 0.$$

$$6. 4^x + 6^x = 9^x.$$

Решите ги логаритамските равенки:

$$7. a) \log(x+5) - \log(x-4) = 0,77815,$$

$$б) \log x^2 - 3 \log x^3 = \log 27.$$

$$8. a) \log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6,$$

$$б) \log(x-9) + 2 \log \sqrt{2x-1} = 2.$$

$$9. a) \log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2,$$

$$б) \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2.$$

Решите ги системите равенки:

$$10. a) \begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3x-2y-3} = 1 \end{cases}, \quad б) \begin{cases} 4^{(x-y)^2-1} = 1 \\ 5^{x+y} = 125 \end{cases},$$

$$в) \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases}, \quad г) \begin{cases} 7^x - 16^y = 0 \\ 4^x - 49^y = 0 \end{cases}.$$

$$11. a) \begin{cases} x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x \\ x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y \end{cases},$$

$$б) \begin{cases} x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x \\ x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 4 \end{cases}.$$

Решите ги равенките:

$$12. a) x^{1+\log_3 x} = 3x,$$

$$б) 3^{\log_3 3} \cdot x^{\log_3 x} = 9,$$

$$в) x^{2\log_2 x} = 2x^2.$$

13. а) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$, б) $\log_4 2^{4x} = 2^{\log_2 4}$, в) $\log_7(6 + 7^{-x}) = 1 + x$.

Решите ги неравенките:

14. а) $5^{2x+1} > 5^x + 4$, б) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$, в) $2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$.

15. а) $\log_5(26 - 3^x) > 2$, б) $\log_{\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{2}) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq 1$,

в) $\log_3^2(5 - x) + 5 \log_{\frac{1}{5}}(5 - x) + 6 \geq 0$.

Решите ги равенките:

16. а) $2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{2} = 0$, б) $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, в) $\sin^2 x + 2 \sin x = 0$.

г) $2 \sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$, д) $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2} \sin 2x$, ф) $\lg x + 2 \operatorname{ctg} x = 3$.

17. а) $2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$,

б) $\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = 0$, в) $4 \sin x - 6 \cos x = 1$.

18. а) $\sin 6x + \sin 4x = 0$,

б) $\cos x = \cos 3x + 2 \sin 2x$.

19. а) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$,

б) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{2}$,

в) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$,

г) $\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x = -1$.

Решите ги неравенките:

20. а) $2 \sin x - \sqrt{3} > 0$,

б) $2 \cos x - \sqrt{2} < 0$,

в) $\lg x - \sqrt{3} \leq 0$,

г) $\operatorname{ctg} x + 2 \geq 0$.

21. а) $\cos 2x - \sin 2x \geq 0$,

б) $\operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x + 3 < 0$.

Решите ги системите неравенки:

22. а) $\begin{cases} \sin x + 1 > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} \lg x > 0 \\ \operatorname{ctg} x > 0 \end{cases}$, в) $\begin{cases} \lg x > 1 \\ \operatorname{ctg} x < -1 \end{cases}$, г) $\begin{cases} 2 \sin x + \sqrt{3} < 0 \\ 2 \cos x > 1 \end{cases}$.

Решите ги системите равенки:

23. а) $\begin{cases} x + y = \frac{3\pi}{2} \\ \cos x - \cos y = -1 \end{cases}$, б) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 2 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2 \end{cases}$, в) $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0,75 \\ \lg x \cdot \lg y = 3 \end{cases}$.

Решите ги равенките:

24. а) $2^{\lg \frac{x}{2} + 2 \cos x} = 4$,

б) $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6$.

25. а) $3 \log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$,

б) $6 \log_2 \sin x - 2 \log_{\sin x} 2 = 1$.

PROSVETNO DELO

6. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

6.1. Форми на задавање на комплексните броеви

Комплексните броеви претставуваат важна математичка алатка за физичарите и инженерите кои работат на полето на електрицитетот и магнетизмот, оптиката и хидродинамиката. Оттаму е интересот на математичарите за проучување на комплексните броеви.

Низ историјата на математиката воведени се нови бројни множества како проширување на основното бројно множество - множеството природни броеви $\mathbb{N}$. Така на пример, со воведувањето на целите броеви се овозможи решавањето, на пример, на равенката $x + 3 = 2$, која нема решение во множеството природни броеви. Слично, со цел да се реши, на пример, равенката $3x = 4$, множеството цели броеви е проширено до множеството рационални броеви. Понатаму, воведувањето на реалните броеви овозможи решавање, на пример, на равенката $x^2 = 2$.

Да ја разгледаме равенката $x^2 = -1$. Оваа равенка нема реално решение, бидејќи не постои реален број чијшто квадрат е негативен број. За да ја решиме равенката $x^2 = -1$ множеството реални броеви ќе го прошириме до ново множество броеви, во кое дадената равенка има решение. За таа цел воведуваме нов симбол i , кој по дефиниција ќе ја има особината $i^2 = -1$. Така добиваме ново множество кое ги содржи реалните броеви и симболот i и во кое равенката $x^2 = -1$ има решение. Во новото бројно множество треба да дефинираме операции кои ќе ги имаат основните својства на операциите собирање и множење на реални броеви. Така на пример, за i и за секој реален број b треба да постои производот $bi (= ib)$. Понатаму, за произволен реален број a и за bi треба да постои збирот $a + bi$. Освен тоа, дефинираните операции треба да бидат согласни со соодветните операции во множеството реални броеви. Тоа значи дека операциите во новото множество, разгледани над подмножеството реални броеви, не треба да се разликуваат од соодветните операции во множеството реални броеви.

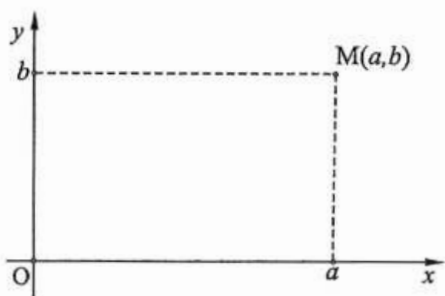
Од сите наведени причини, во обид да го решиме поставениот проблем дефинираме множество од сите формални записи од облик $a + bi$, каде a и b се реални броеви, наречени комплексни броеви. Вака дефинираното множество се нарекува множество комплексни броеви и се означува со $\mathbb{C}$. Новиот број i за кој $i^2 = -1$ се нарекува имагинарна единица, и е претставена со $i = \sqrt{-1}$. Значи, се користи ознаката:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Секој реален број a ќе го изедначиме со комплексниот број $a + 0i$, ставајќи $a = a + 0i$. Значи, посебно за реалниот број 0 (нула) имаме $0 = 0 + 0i$ и притоа мора да е точно $0i = 0$. Така, $0 = 0 + i0$ ја претставува и комплексната нула во однос на собирањето. На таков начин можеме да сметаме дека множеството реални броеви $\mathbb{R}$ е подмножество од множеството комплексни броеви $\mathbb{C}$.

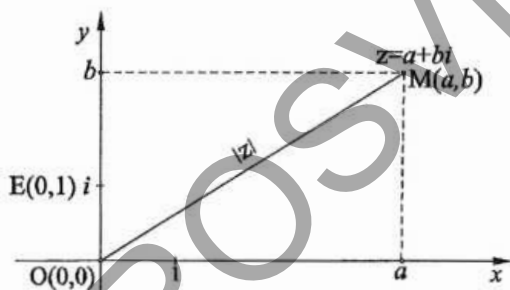
Комплексните броеви вообичаено ќе ги означуваме со буквите $z, w, u, \dots$ итн. Записот $z = a + bi$ се вика **алгебарска (стандардна) форма на комплексен број**. Притоа бројот a се нарекува **реален дел** на комплексниот број $z = a + bi$, а бројот b се нарекува **имагинарен дел** на z . Притоа ги користиме ознаките $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$. Како што е вообичаено, $-bi$ го означува спротивниот број на bi и по договор $a + (-bi) = a - ib$. Овој број се нарекува конјугирано комплексен на z и се означува со $\bar{z}$. Значи $\bar{z} = a - ib$.

Множеството на сите реални броеви може да се претстави и како множество на сите точки од соодветна права, наречена координатна права или бројна оска. Тогаш велíme: меѓу множеството на реални броеви и множеството на сите точки на бројната оска постои биекција или обратно еднозначно соодветство, имено на секој реален број му одговара една и само една точка од бројната оска, и обратно, секоја точка од бројната оска е претставник (геометриски репрезент) точно на еден реален број. Соодветството меѓу броевите и точките во математиката суштински во ништо не се разликува од соодветството меѓу звуците и буквите во нашиот јазик, при што ние често наместо зборот „глас“ говориме „буква“ и обратно. Затоа не правиме битна разлика меѓу координатната права (бројната оска) и множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви.



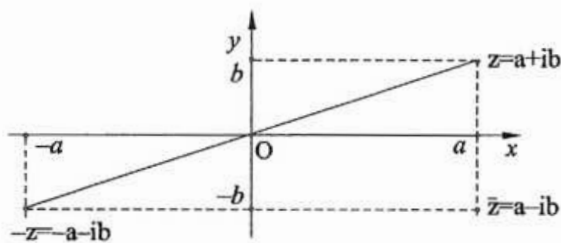
црт. 1

Понесени од желбата и комплексните броеви да ги претставуваме со точки, доаѓаме до сознанието дека биекција може да се воспостави и меѓу множеството на комплексните броеви и множеството точки од координатната рамнина xOy . Имено, нека во рамнината Π е зададен правоаголен координатен систем xOy . Тогаш на секоја точка $M \in \Pi$ може да ѝ се придружи подреден пар на реални броеви (a, b) , каде што a е апсциса, а b - ордината на точката M (црт. 1). Од друга страна, со подредениот пар на реални броеви (a, b) , зададен е еден и само еден комплексен број $z = a + bi$. Според тоа, природно се наметнува и следново просто геометриско претставување на комплексните броеви. На комплексниот број $z = a + bi$, односно $z = (a, b)$ му одговара (му ја придружуваме) точката $M(a, b)$ од координатната рамнина xOy (црт. 1), и обратно, точката $M(a, b)$ од координатната рамнина xOy е слика (геометриски претставник) на комплексниот број $z = a + bi$. Затоа координатната рамнина xOy користена за геометриско претставување на комплексните броеви се нарекува и **комплексна рамнина**.



црт. 2

Реалните броеви $z = a + 0i = a$ на комплексната рамнина ги претставуваме со точките на Ox - оската, а чисто имагинарните броеви $z = 0 + bi = bi$ со точките на Oy - оската (црт. 2). Затоа Ox - оската се вика уште и реална оска, а Oy - оската - имагинарна оска. На имагинарната единица $i = 0 + 1i$ ѝ одговара точката $E(0,1)$, а на комплексната нула $0 + 0i = 0$ - координатниот почеток $O(0,0)$ (црт. 2).



црт. 3

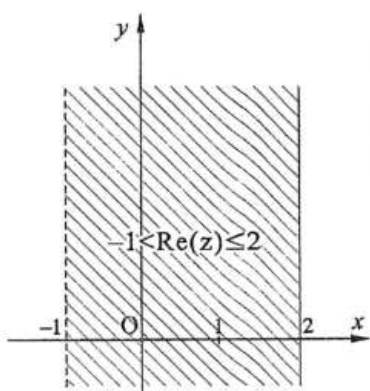
Конјугирано комплексните броеви z и $\bar{z}$ секогаш се две точки симетрични во однос на реалната оска Ox , а спротивните еден на друг комплексни броеви z и $-z = -a - ib$ се две точки симетрични во однос на координатниот почеток $O(0,0)$ (црт. 3).

Очигледно е дека **модулот** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ на комплексниот број $z = a + bi$ е еднаков на растојанието на точката $M(a, b)$ што му одговара на z , од координатниот почеток O (црт. 2).

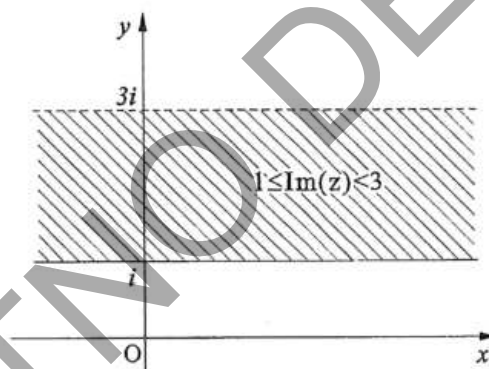
Множеството на сите комплексни броеви со ист реален дел претставува права паралелна со Oy - оската; множеството на сите комплексни броеви со ист имагинарен дел е права паралелна со Ox - оската, а множеството на сите комплексни броеви со ист модул $|z| = r, r > 0$ претставува кружница со центар во координатниот почеток $O(0, 0)$ и радиус r .

Пример 1 Деловите од комплексната рамнина xOy во кои лежат сите точки $z = x + yi$ што ги задоволуваат условите:

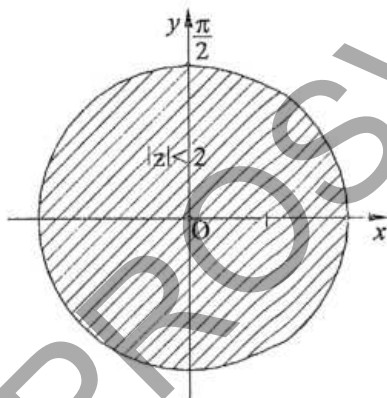
- а) $-1 < \operatorname{Re}(z) \leq 2$, б) $1 \leq \operatorname{Im}(z) < 3$, в) $|z| \leq 2$,
се прикажани шрафирано на црт. 4, црт. 5 и црт. 6 соодветно.



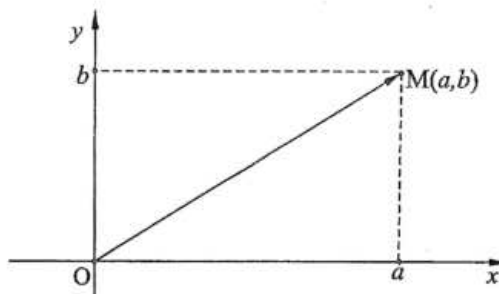
црт. 4



црт. 5



црт. 6



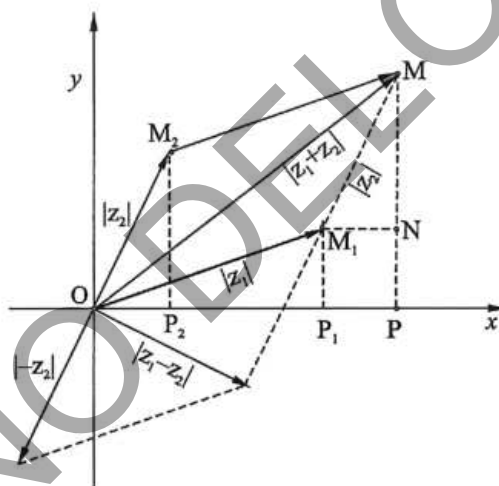
црт. 7

На комплексните броеви може да им се даде и друга геометриска интерпретација. Секоја точка $M(a, b)$ од рамнината xOy може да се доведе во еднозначно соодветство (биекција) со нејзиниот радиусвектор $\overrightarrow{OM}$, т.е. со векторот што поаѓа од координатниот почеток $O(0, 0)$, а завршува во точката $M(a, b)$ (црт. 7). Затоа, секој комплексен број $z = a + bi$ што одговара на точката $M(a, b)$ може да се разгледува и како вектор $\overrightarrow{OM}$ со

координати (a, b) . Очигледно е дека така воспоставеното соодветство меѓу множеството на сите комплексни броеви и множеството на сите радиусектори во координатната рамнина xOy претставува биекција, бидејќи на секој комплексен број $z = a + bi$ ($z \neq 0$) му соодветствува еден и само еден вектор $\overrightarrow{OM}$, и обратно, секој вектор $\overrightarrow{OM}$ е слика (претставник) на точно еден број $z = a + bi$.

Ваквото геометриско претставување на комплексните броеви овозможува операциите собирање и одземање на комплексни броеви да се сведат на соодветните операции со вектори. На пример, ако се дадени броевите $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ нивниот збир е еднаков на бројот $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Ако на комплексниот број z_1 му одговара вектор $\overrightarrow{OM_1}$ со координати на крајната точка $M_1(a_1, b_1)$, а на комплексниот број z_2 - вектор $\overrightarrow{OM_2}$ со крајна точка $M_2(a_2, b_2)$, тогаш збирот на векторите $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ ќе биде векторот $\overrightarrow{OM}$ со почеток O и крај во четвртото теме на паралелограмот, што е конструиран над векторите $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ (црт.8).



црт. 8

Од складноста на триаголниците OP_2M_2 и M_1NM следува дека точката M - крајна точка на векторот $\overrightarrow{OM}$ ќе има координати:

апсциса: $\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{P_1P} = \overline{OP_1} + \overline{OP_2} = a_1 + a_2$ и
ордината: $\overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM} = \overline{P_1M_1} + \overline{P_2M_2} = b_1 + b_2$.

Според тоа, точката M , односно векторот $\overrightarrow{OM}$ ќе му одговара на комплексниот број $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, т.е. на збирот на комплексните броеви $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$. Значи, ако на бројот z_1 му одговара вектор $\overrightarrow{OM_1}$, а на бројот z_2 му одговара вектор $\overrightarrow{OM_2}$, тогаш на збирот $z_1 + z_2$ ќе му одговара збирот на векторите $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, а на разликата $z_1 - z_2$ ќе ѝ одговара разликата на векторите $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$.

Од триаголникот OM_1M , чии страни се $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1 + z_2|$ (црт. 8) следуваат следниве важни неравенства:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (1)$$

т.е. модулот на збирот од два комплексни броја е помал или еднаков на збирот од модулите на собирците, но е поголем или еднаков на разликата од тие модули.

Неравенствата (1) се во полна согласност со познатата теорема во елементарната геометрија за односот меѓу страните на триаголникот. Од неравенствата (1) имајќи предвид дека $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ и $|-z_2| = |z_2|$ следуваат и неравенствата:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (2)$$

т. е. за модулот на разликата на два комплексни броја важат исти такви неравенства како и за модулот на збирот. Тоа е разбирливо кога се има предвид дека $|z_1 - z_2|$ - должина на другата дијагонала на паралелограмот OM_1MM_2 е, исто така, страна на триаголник, чии други две страни се $|z_1|$ и $|z_2|$ (црт. 8).

Знакот за равенство во (1) и (2) ќе важи само во посебен случај кога точките O , z_1 и z_2 лежат на една права.

Пример 2 Да го одредиме множеството точки z во комплексната рамнина кои го задоволуваат условот;

а) $|z - a| = r$, $r > 0$ каде што a е фиксна точка од истата рамнина, а r - позитивен реален број,

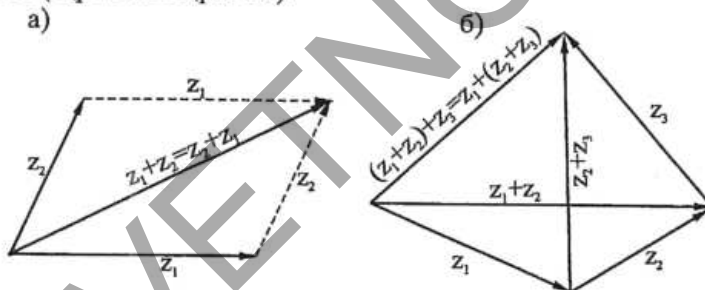
б) $|z - a| = |z - b|$, $a \neq b$, каде што a и b се фиксни точки од истата рамнина.

Решение. Нека z_1 и z_2 се две точки на комплексната рамнина. Тогаш $|z_1 - z_2|$ или $|z_2 - z_1|$ е должината на дијагоналата M_1M_2 на паралелограмот OM_1MM_2 (црт. 8) што ги сврзува точките z_1 и z_2 , односно, растојанието меѓу тие две точки. Според тоа, $|z - a|$ е растојанието на променливата точка z од една фиксна точка a во комплексната рамнина. Оттука следува дека множеството точки што го задоволуваат условот:

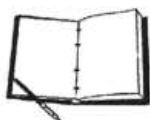
а) $|z - a| = r$, $r > 0$ е кружница со центар во точката a и радиус r ;

б) $|z - a| = |z - b|$, $a \neq b$ е симетралата на отсечката чии крајни точки се фиксните точки a и b .

Ако комплексните броеви z_1, z_2 и z_3 ги третираме како вектори, лесно може да се покаже дека за собирањето на комплексните броеви важат комутативниот и асоцијативниот закон (црт. 9а и црт. 9б).



црт. 9



Задачи за самостојна работа

1. Одреди го реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број z ако:

а) $z = 4 + 2i$,

б) $z = -3 + 4i$,

в) $z = 3 - 2i$,

г) $z = -4 + \frac{1}{2}i$,

д) $z = \sqrt{2} + (1 + \sqrt{3})i$,

е) $z = 1 + \sqrt{2} + i$,

е) $z = -3$,

ж) $z = -3i$.

2. Запиши го во алгебарска форма комплексниот број z ако:

а) $\operatorname{Re}(z) = 3$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$;

б) $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{4}$, $\operatorname{Im}(z) = 2 - \sqrt{2}$;

в) $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{3} - \sqrt{3}$, $\operatorname{Im}(z) = 0$;

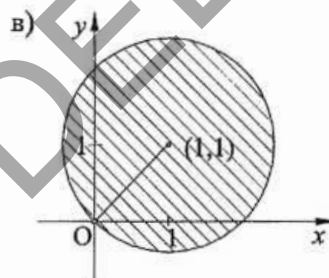
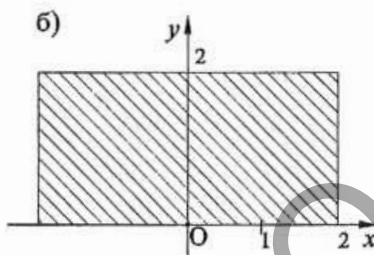
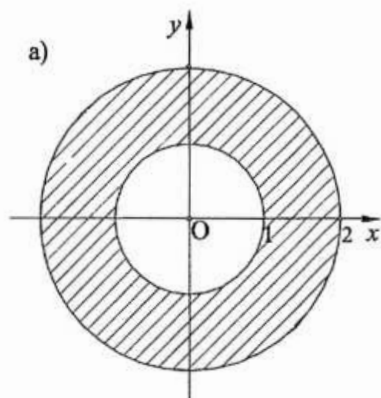
г) $\operatorname{Re}(z) = m + 1$, $\operatorname{Im}(z) = n - \sqrt{2}$.

3. Запиши ги во алгебарска форма комплексните броеви што им одговараат на точките: $A(-2,1)$, $B(0,-5)$, $C(-4,0)$, $D(2,2\sqrt{3})$.

4. Најди го множеството од сите точки $z = x + iy$ од комплексната рамнина кои ги задоволуваат условите:

- а) $\operatorname{Re}(z) \leq 0$, б) $-2 < \operatorname{Re}(z) \leq 5$, в) $\operatorname{Im}(z) \geq 3$, г) $\operatorname{Im}(z) < 5$,
 д) $|z| = 3$, е) $|z| \leq 4$, ж) $1 \leq |z| \leq 3$, з) $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, $|z| \leq 2$.

5. Најди ги условите кои ги задоволуваат сите точки (и само тие) од шрафираната област на црт. 10 а, црт. 10б и црт. 10в.



црт. 10

6. Како се распоредени векторите што им одговараат на комплексните броеви z_1 и z_2 , ако:

- а) $|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|$, б) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

7. Најди ја должината на отсечката што ги соединува точките што им одговараат на броевите $-5 + 3i$ и $-2 - i$.

6.2. Тригонометриска форма на комплексните броеви

Положбата на која било точка M на рамнината со помош на декартовиот координатен систем ја определуваме (задаваме) со нејзините декартови координати - со апсцисата и ординатата. Покрај овој координатен систем често користиме и друг систем наречен **поларен координатен систем**. Него го определуваме кога во рамнината избираме фиксна точка O (пол) и полуправа Ox (поларна оска) што излегува од полот O . Положбата на точката M на рамнината ја определуваме со два броја - поларни координати: должината r на векторот $\overrightarrow{OM}$ и аголот φ (мерен во радијани), што тој вектор го зафаќа со поларната оска (црт. 1).

Да ја одредиме врската меѓу декартовите координати (a, b) и поларните координати (r, φ) на една точка од рамнината. За таа цел поларниот координатен систем го поставуваме така што неговиот пол O да се совпадне во координатниот почеток

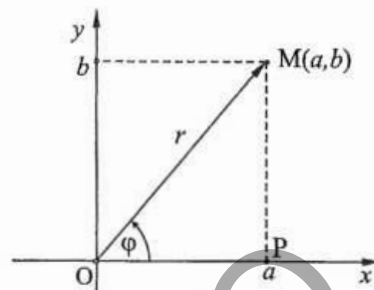
$O(0,0)$, а поларната оска- со позитивната насока на апсцисната оска на декартовиот систем (црт. 2). Во таков случај, согласно дефинициите на тригонометриските функции, за правоаголниот триаголник OMP имаме (црт. 2):

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi \quad (1)$$

Оттука, при $r > 0$, следува:

$$\cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2)$$

Релациите (1) и (2) овозможуваат да се добијат декартовите координати со помош на поларните координати, и обратно.



црт. 2

Видовме, на секој комплексен број z му соодветствува единствена точка M на координатната рамнина. При записот на бројот z во неговата алгебарска форма $z = a + bi$, гледаме дека се користат декартовите координати (a, b) на точката M што му соодветствува на бројот z .

Со примена на формулите (1), комплексниот број z можеме да го запишеме и во следнава форма $z = a + bi = r \cos \varphi + (r \sin \varphi)i$, или

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (3)$$

Овој запис на комплексниот број се вика негова **тригонометриска форма**.

Должината r на радиусвекторот $\overrightarrow{OM}$ се вика **модул** или апсолутна вредност на комплексниот број z и се означува $|z|$, а радијанската мера на аголот φ што радиусвекторот $\overrightarrow{OM}$ го гради со позитивната насока на Ox -оската се вика **аргумент** на комплексниот број z и се означува со $\text{Arg} z$. Според тоа, $|z| = r, \text{Arg} z = \varphi$, каде што r и φ се поларни координати на точката M , што му одговара на бројот z .

Модулот на кој било комплексен број z е ненегативен реален број, при што тој е еднаков на нула само за $z = 0$. Тој е еднозначно определен со положбата на точката M , т.е. за него важи

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4)$$

Аголот φ , односно $\text{Arg} z$, може да ги добие кои било реални вредности- позитивни или негативни, при што позитивните агли имаат насока спротивна на движењето на стрелките на часовникот. Аргумент не е определен само за $z = 0 = 0 + i0 = 0(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ за секој φ . По дефиниција се зема $\arg 0 = 0$.

Аргументот на кој било комплексен број $z \neq 0$ има бесконечно многу вредности кои се разликуваат една од друга за цел број k пати од 2π . Значи, ако φ е аргумент на бројот z , тогаш и $\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ е, исто така, аргумент на тој број. Од сите тие вредности, обично ја избираме вредноста на φ што го задоволува условот $-\pi < \varphi \leq \pi$ за да биде φ еднозначно определен за секој комплексен број. Таа вредност се вика **главна вредност на аргументот** на бројот z и се означува со $\arg z$, т.е. $-\pi < \arg z \leq \pi$. Меѓутоа, понекогаш главната вредност на φ се дефинира со: $0 \leq \arg z < 2\pi$.

Ако комплексниот број е реален број, т.е. $z = a + 0i = a$, тогаш

$\varphi = 0$ (ако $a > 0$), или $\varphi = \pi$ (ако $a < 0$).

Да заклучиме, множеството од сите комплексни броеви z со ист аргумент φ е полуправа OM која со позитивната насока на Ox -оската зафаќа агол φ , а множеството,

пак од сите комплексни броеви z со ист модул $|z| = r$ е кружница со центар во почетокот (полот) O и радиус r .

Аргументот и модулот на комплексниот број $z = a + bi \neq 0$ ги одредуваме од формулите (2), при што од знаците на $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, односно од знаците на a и b утврдуваме во кој квадрант лежи бараната вредност на аргументот. Понекогаш, при одредувањето на r и φ пожелно е да користиме и соодветен цртеж. На пример, со помош на црт. 3, лесно добиваме:

$$|2 - 2i| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}; \arg(2 - 2i) = -\frac{\pi}{4};$$

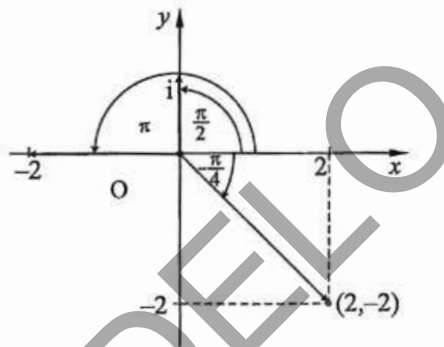
$$|i| = |0 + i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \arg i = \frac{\pi}{2};$$

$$|-2| = 2, \arg(-2) = \pi.$$

Според тоа:

$$2 - 2i = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right],$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, \quad -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$



црт. 3

Пример 1 Запиши го во тригонометриска форма комплексниот број $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Решение. Со помош на формулите (2) добиваме

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Оттука } \varphi = \frac{\pi}{3}. \text{ Значи: } 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Пример 2 Запиши ги во тригонометриска форма следниве комплексни броеви:

$$\text{а) } z = -2 \left(\sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5} \right), \quad \text{б) } w = 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{3}{4} \pi \right).$$

Решение. а) Комплексниот број z не е зададен во тригонометриска форма, затоа што модулот не може да биде негативен број (-2) и затоа што коефициентот на имагинарниот дел во заградата е $-\cos \frac{\pi}{5}$, а не $\sin \frac{\pi}{5}$. Да го претставиме дадениот број z

прво во видот $z = 2 \left(-\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} \right)$, согласно равенството $-2 = (-1) \cdot 2 = 2 \cdot (-1)$ и асоцијативноста на множењето. За да го претставиме бројот z во тригонометриска форма, за негов аргумент треба да се најде таков агол φ за кој ќе биде: $\cos \varphi = -\sin \frac{\pi}{5}$,

$$\sin \varphi = \cos \frac{\pi}{5}.$$

Земајќи предвид дека аголот φ е во II квадрант и за него функцијата преминува во кофункција, тогаш не е тешко да утврдиме дека $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$. Навистина,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5}.$$

Значи, тригонометриската форма на бројот z гласи:

$$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right).$$

б) Комплексниот број w не е зададен во тригонометриска форма затоа што под знаците на косинус и синус не стои ист агол φ . Овде наидуваме на потешкотии кај кои во најголем број случаи (при преминот од алгебарска во тригонометриска форма на комплексниот број, и обратно) е невозможно според дадените вредности на синусот и косинусот да се одреди точно аголот φ , т.е. за даден агол да се напишат точните вредности на неговиот синус и косинус.

Бидејќи $\cos\varphi = \cos(\varphi + 2k\pi)$, $\sin\varphi = \sin(\varphi + 2k\pi)$, тригонометриската форма (3) на комплексниот број z може да се запише и во видот:

$$z = r[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Оттука следува дека: Два комплексни броја $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ претставени во тригонометриска форма

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

се еднакви, ако и само ако:

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

За модулите и аргументите на два конјугирано комплексни броја z и $\bar{z}$ важат релациите:

$$\bar{r} = r, \quad \bar{\varphi} = -\varphi, \quad \text{односно,} \quad |\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Значи, тригонометриската форма на конјугирано комплексниот број $\bar{z}$ на бројот $z = r\cos\varphi + i\sin\varphi$ ќе гласи

$$\bar{z} = r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = r(\cos\varphi - i\sin\varphi). \quad (7)$$



Задачи за самостојна работа

1. Најди го модулот и аргументот на комплексните броеви:

а) $z_1 = \sqrt{3} - i$, б) $z_2 = 1 - i$, в) $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$, г) $z_4 = 2 + i\sqrt{12}$, д) $z_5 = 1 + i$.

2. Претстави ги во тригонометриска форма следниве комплексни броеви:

а) $z_1 = 1 - itg\alpha$, б) $z_2 = 1 + \sin\alpha + i\cos\alpha$, в) $z_3 = -3\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

3. Претстави ги во алгебарска форма комплексните броеви:

а) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, б) $8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

4. Претстави ги во тригонометриска форма броевите:

а) $-i$, б) $3i$, в) $2 + 2i$, г) $3\cos\frac{\pi}{6} - 3i\sin\frac{\pi}{6}$, д) $\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}$.

5. Даден е бројот $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Претстави ги во тригонометриска форма броевите $\bar{z}$ и z^{-1} .

6. Утврди кој услов е потребен за да биде исполнето равенството $z^2 = (\bar{z})^2$.

7. Најди го множеството на сите точки $z = x + yi$ од комплексната рамнина, што ги задоволуваат условите:

а) $0 < |z| \leq 3$, б) $\arg z = \frac{\pi}{4}$, в) $|z| = 1$, г) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$, д) $0 \leq |z| \leq 5$ и $\arg z \leq \pi$.

6.3. Множење и делење на комплексни броеви во тригонометриска форма

Множението и делењето на комплексните броеви се поедноставува ако тие се зададени во тригонометриска форма.

Нека $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ (1)

се два комплексни броја зададени во тригонометриска форма. Тогаш

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)].$$

Од тригонометријата се познати формулите:

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Според тоа:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (2)$$

од каде што заради (1) ги добиваме равенствата:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad (3)$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \quad (4)$$

Според тоа, при множењето на комплексни броеви, нивните модули се множат, а аргументите се собираат.

Равенството (2) лесно може да се обопшти, т.е. за производот на конечно многу комплексни броја

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \dots, z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n),$$

важи равенството:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)] \quad (5)$$

Пример 1 Најди го производот на комплексните броеви:

$$z_1 = 3(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}), z_2 = 2\sqrt{2}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}), z_3 = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}).$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} [\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6})] = \\ &= 12(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = 12[(\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}))] = \end{aligned}$$

$$= 12(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) = 12(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 6(1 - i\sqrt{3}).$$

За производот на два конјугирано комплексни броја z и $\bar{z}$ имаме:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r^2[(\cos(\varphi - \varphi) + i \sin(\varphi - \varphi))] = \\ &= r^2(\cos 0 + i \sin 0) = r^2(1 + i0) = r^2. \end{aligned}$$

Бидејќи $r = |z|$ добиваме дека

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Оттука, во посебен случај, ако $r = 1$, имаме:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi) = 1 \quad (6)$$

Со аналогна постапка за количникот на комплексните броеви (1) при $z_2 \neq 0$, односно при $r_2 \neq 0$, добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2)] \end{aligned}$$

Според тоа

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (7)$$

од каде што следува дека

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{r_1}{r_2} \right|, \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2.$$

Според тоа, при делењето на комплексните броеви модулите се делат, а аргументите се одземаат.

Пример 2 Најди го количникот на комплексните броеви:

$$z_1 = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) \quad \text{и} \quad z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}).$$

$$\begin{aligned} \text{Решение.} \quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}\right) \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i. \end{aligned}$$

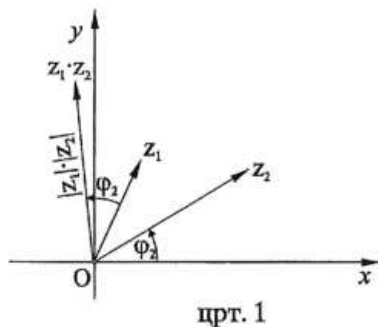
Пример 3 Најди го реципрочниот број $\frac{1}{z}$ на бројот $z \neq 0$.

Решение. Од $\frac{1}{z} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{r}[(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))]$ добиваме дека

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = r^{-1}[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]. \quad (8)$$

$$\text{Според тоа} \quad |z^{-1}| = |z|^{-1}, \quad \text{Arg}(z^{-1}) = -\text{Arg} z. \quad (9)$$

Да се задржиме сега на геометриската интерпретација на множењето и делењето на комплексните броеви.

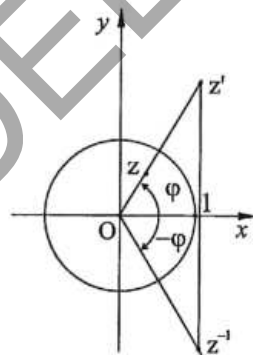


црт. 1

Имајќи ги предвид формулите (3) и (4), точката што соодветствува на производот $z_1 \cdot z_2$ на комплексните броеви $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ ќе ја добиеме ако прво радиусекторот што одговара на z_1 го ротираме околу почетокот O во позитивна насока за агол $\varphi_2 = \text{Arg } z_2$, а потоа модулот на тој вектор $|z_1| = r_1$ го зголемиме за $r_2 = |z_2|$ пати (при $0 \leq r_2 < 1$ тоа ќе биде е, всушност, намалување) (црт. 1).

Секој количник $\frac{w}{z}$ можеме да го претставиме како производ $\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = w \cdot z^{-1}$, па затоа е доволно да покажеме како од точката z ја добиваме точката $\frac{1}{z} = z^{-1}$.

Точката z^{-1} ќе ја добиеме ако, согласно формулите (8) и (9), од точката z прво преминеме во точката z' која лежи на растојание r^{-1} од почетокот O на истата полуправа, на која лежи и точката z (црт. 2), а потоа преминуваме кон точката што со z' е симетрична спрема реалната оска (црт. 2). Тоа е бараната точка z^{-1} . Очигледно е дека точката z' ќе се совпадне со z ако и само ако $|z| = 1$. Потоа, ако z' лежи во внатрешноста на единичниот круг, тогаш z' ќе лежи надвор од него, и обратно.



црт. 2



Задачи за самостојна работа

1. Најди го производот и количникот на комплексните броеви:

а) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \cdot \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$,

б) $(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) \cdot \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$.

2. Најди ги броевите:

а) $z_1 \cdot z_2$,

б) $\frac{z_1}{z_2}$,

в) $\frac{z_2}{z_1}$,

ако $z_1 = 2(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ и $z_2 = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$.

3. Како се менува модулот и аргументот на комплексниот број z , кога тој

а) се множи со i , б) се дели со i .

4. Помножи ги комплексните броеви:

а) $z_1 = 5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$ и $z_2 = 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$,

б) $z_1 = 4(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ и $z_2 = 6(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8})$,

в) $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ и $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$.

5. Поделете ги комплексните броеви:

а) $z_1 = \cos 130^\circ + i \sin 130^\circ$ и $z_2 = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ$,

б) $z_1 = 2(\cos 107^\circ + i \sin 107^\circ)$ и $z_2 = 5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ)$,

в) $z_1 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ и $z_2 = 3(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$,

г) $z_1 = \cos 70^\circ + i \sin 70^\circ$ и $z_2 = \cos 100^\circ + i \sin 100^\circ$.

6.4. Степенување и коренување на комплексни броеви. Моаврова формула

Од формулата (5) во 6.3. при $z_1 = z_2 = \dots z_n = z$, следува дека ако $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, тогаш за секој природен број n важи:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (1)$$

Според тоа, при степенувањето на комплексен број z со показател природен број n , модулот се степенува со тој показател, а аргументот се множи со показателот на степенот, т.е.

$$|z^n| = |z|^n = r^n, \quad \text{Arg}(z^n) = n \text{Arg } z = n\varphi.$$

Пример 1 Најди го степсот $(1+i)^{12}$.

Решение. $(1+i)^{12} = [\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})]^{12} = 2^6 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 64(\cos \pi + i \sin \pi) =$
 $= 64(-1 + i \cdot 0) = -64.$

При $r=1$ формулата (1) го добива видот:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad (2)$$

Оваа формула игра голема улога во елементарната математика и се вика **Моаврова формула**. Таа важи и кога степеновиот показател е кој било цел негативен број, т.е.

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi). \quad (3)$$

Значи, имајќи предвид дека $z^{-n} = (z^{-1})^n$, со примена на Моавровата формула врз бројот z^{-1} чија тригонометриска форма е дадена со формулата (8) од 6.3., при $r=1$ ќе ја добиеме формулата (3).

Со помош на Моавровата формула изразите $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ лесно можат да се изразат преку синус и косинус од аголот φ .

Пример 2 Да ги изразиме $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ преку $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

Решение. При $n=3$ од формулата (2) добиваме:

$$\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3\cos^2 \varphi \cdot i \sin \varphi + 3i^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi, \text{ т. е.}$$

$$\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3\cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3\cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi - \sin^3 \varphi).$$

Два комплексни броја се еднакви ако и само ако се еднакви соодветно, нивните реални и имагинарни делови. Според тоа важат равенствата:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

Сега ќе покажеме како може да се определи корен од комплексен број зададен во тригонометриска форма, што во голема мера ја олеснува постапката во однос на пресметувањето на корен од комплексен број зададен во алгебарска форма.

Да најдеме n -ти корен од комплексен број $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Да претпоставиме дека бараниот n -ти корен е некој комплексен број $w = \rho(\cos \Theta + i \sin \Theta)$ со модул ρ и аргумент Θ .

Ако бројот w постои, тој мора да ја задоволува релацијата $w^n = z$, односно $[\rho(\cos \Theta + i \sin \Theta)]^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, односно $\rho^n (\cos n\Theta + i \sin n\Theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Оттука, врз основа на критериумот за еднаквост на два комплексни броја во тригонометриска форма, следуваат релациите: $\rho^n = r$, $n\Theta = \varphi + 2k\pi$, или

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \Theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

За модулот ρ добиваме единствена ненегативна вредност $\rho = \sqrt[n]{r}$, бидејќи $\sqrt[n]{r}$ го разгледуваме како аритметички корен. Меѓутоа, за аргументот Θ на бараниот комплексен број w се добиваат бесконечно многу вредности, во зависност од целиот број k . Според тоа, бараниот комплексен број w (n -ти корен од дадениот комплексен број z), ќе биде:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

каде што со w_k ја означуваме онаа вредност на w што му одговара на избраниот цел број k .

Меѓутоа, за различни вредности на k не секогаш ќе добиваме и различни комплексни броеви w_k . Всушност, при зголемување на k за 1, аргументот

$$\Theta_k = \text{Arg } w_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

ќе се зголеми за $\frac{2\pi}{n}$ радијани, а при зголемување на k за n единици, Θ_k ќе се зголеми за 2π . Но, бидејќи тригонометриските функции синус и косинус се периодични со најмал период 2π , имаме $w_{k+n} = w_k$.

Според тоа, формулата (4) определува само n различни комплексни броеви w_k кои можат да се добијат кога k прима кои било n последователни цели вредности, на пример, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Така доаѓаме до заклучокот дека $\sqrt[n]{z} = w_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ каде што:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

Значи, n -ти корен од кој било комплексен број (реален или имагинарен) одговара на n различни комплексни броеви, кои се добиваат од формулата (5) за $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, т.е.

$$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}.$$

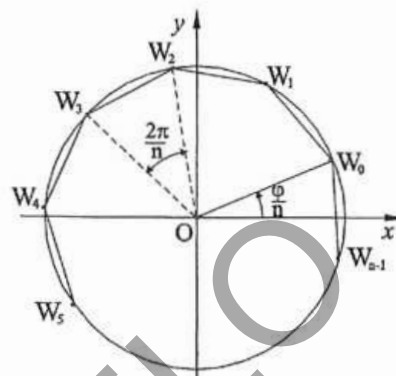
Посебно кај n -ти корен од имагинарен број сите n броеви се имагинарни броеви, а кај n -тиот корен од реален број a , од сите n различни броеви, реални се само два, еден или ниту еден, во зависност од знакот на a и парноста на n .

Забележуваме дека модулите на сите n вредности на w_k во формулата (5) се еднакви на $\sqrt[n]{r}$, а аргументите:

$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi+2\pi}{n}, \frac{\varphi+4\pi}{n}, \dots$ им се разликуваат еден од друг за по $\frac{2\pi}{n}$. Тоа покажува дека точките што им одговараат на

сите n -ти корен од комплексниот број z лежат на иста кружница со центар во координатниот почеток и радиус $\rho = \sqrt[n]{r}$, а кружницата ја делат на n складни лаци (црт. 1).

Според тоа, сите n вредности на n -тиот корен од комплексен број $z \neq 0$ (реален или имагинарен) во комплексната рамнина претставуваат темиња на еден правилен n -аголник што е впишан во кружница со радиус $\sqrt[n]{r}$ и центар во почетокот O .



црт. 1

Пример 3 Најди го множеството комплексни броеви $\sqrt[3]{i}$.

Решение. Бидејќи $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ бараните вредности на $\sqrt[3]{i}$ ги добиваме од формулата:

$$w_k = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \quad \text{за } k=0,1,2.$$

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_1 = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} =$$

$$= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_2 = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i \cdot 1 = -i.$$

$$\text{Според тоа, } \sqrt[3]{i} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i \right\}.$$

Пример 4 Најди го множеството комплексни броеви $\sqrt[3]{-8}$.

Решение. Бројот -8 има тригонометриска форма $8(\cos \pi + i \sin \pi)$. Бараните броеви кои го сочинуваат множеството $\sqrt[3]{-8}$ ги добиваме од равенството:

$$w_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), \quad k=0,1,2.$$

$$w_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$w_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2,$$

$$w_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(2\pi - \frac{\pi}{3})\right) =$$

$$= 2(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) = 1 - i\sqrt{3},$$

$$\text{Според тоа, } \sqrt[3]{-8} = \{1 + i\sqrt{3}, -2, 1 - i\sqrt{3}\}.$$

Пример 5 Најди ги сите броеви на множеството $\sqrt[4]{-2 + 2i\sqrt{3}}$.

Решение. Претходно, бројот $z = -2 + 2i\sqrt{3}$ го претставуваме во тригонометриска форма:

За модулот добиваме $r = \sqrt{4 + 12} = 4$, а од $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ и $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ имаме дека $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

$$\text{Значи, } -2 + 2i\sqrt{3} = 4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}).$$

Тогаш бараните броеви се:

$$w_k = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3.$$

$$w_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right),$$

$$w_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right),$$

$$w_3 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$

Од посебен интерес и важност е n -тиот корен од бројот 1. И во овој случај множеството корени има n различни комплексни броеви наречени **примитивни корени** на бројот 1.

Согласно равенството (5) од 6.4., а имајќи предвид дека $1 = \cos 0 + i \sin 0$ примитивните корени на бројот 1 се зададени со формулата:

$$E_k = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (1)$$

Реалните вредности на $\sqrt[n]{1}$ се добиваат за $k=0$ и $k=\frac{n}{2}$ ако n е парен број; и за $k=0$, ако n е непарен број.

Точките што им соодветствуваат на сите броеви од множеството $\sqrt[n]{1}$ лежат на кружницата со центар во почетокот O и радиус $r=1$. Тие кружницата ја делат на n еднакви лаци, а една од нив што му одговара на бројот 1 е Ox -оската. Оттука следува дека точките што им одговараат на имагинарните броеви од множеството $\sqrt[n]{1}$ се

симетрични во однос на реалната оска. Значи броевите од множеството $\sqrt[3]{1}$, што не се реални, се по парови конјугирано комплексни.

Квадратниот корен од единицата има две вредности: 1 и -1 . Четвртиот корен од единицата има четири вредности: $1, i, -1, -i$ т.е. множеството од сите 4-ти корени на единицата е $E_4 = \{1, i, -1, -i\}$. Кубните корени од единицата ги наоѓаме по формулата (1):

$$E_k = \sqrt[3]{1} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Освен $\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$, множеството $\sqrt[3]{1}$ ги содржи и броевите:

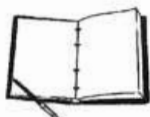
$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

Пример 6 Со помош на формулата (1) лесно може да го најдеме множеството $\sqrt[6]{1}$:

$$E_6 = \left\{ 1, \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Забележуваме дека секој кубен корен од единицата е и 6-ти корен од единицата, но не секој 4-ти корен од единицата е и 6-ти корен на единицата.



Задачи за самостојна работа

1. Даден е комплексниот број $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$. Најди ги броевите:

а) z^4 ,

б) z^6 ,

в) z^{10} .

2. Најди ја вредноста на изразот:

а) z^3 за $z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$,

б) $z^4 + 1$ за $z = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$.

3. Упрости го изразот:

а) $(1 + i\sqrt{2})^5 - (1 - i\sqrt{2})^5$,

б) $(\sqrt{3} + i)^6 - (\sqrt{3} - i)^6$,

в) $(1 + i)^{10} + (1 - i)^{10}$.

4. Докажи дека броевите $(a + bi)^n$ и $(a - bi)^n$, $n \in \mathbb{N}$ се конјугирано комплексни.

5. Пресметај:

а) $i^{\frac{3}{4}}$,

б) $(\sqrt{3} + i)^{\frac{2}{3}}$,

в) $(\sqrt{3} - i)^{\frac{4}{5}}$.

6. Пресметај:

а) $(\sqrt{3}(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ))^{-3}$

б) $\sqrt[4]{-16}$

в) $\sqrt[5]{-1}$.

7. Одреди го множеството $\sqrt[8]{1}$.

8. Докажи дека количникот на кои било два броја од множеството $\sqrt[3]{1}$ е пак број од множеството $\sqrt[3]{1}$.

9. Докажи дека реципрочната вредност на кој било број од множеството $\sqrt[n]{1}$ е пак број од множеството $\sqrt[n]{1}$.

10. Најди го множеството комплексни броеви $\sqrt[n]{1}$.

6.5. Неравенства на модул од збир и модул од разлика на два комплексни броја

Често пати ги сретнуваме неравенствата:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (1)$$

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (2)$$

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| \quad (3)$$

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2| \quad (4)$$

кои се користат при оценување на модулот од збир и разлика на комплексни броеви. Неравенствата (1) и (2) се користат за давање на оценка одгоре, а неравенствата (3) и (4) за давање оценка оддолу.

Да го докажеме прво неравенството (1).

Нека $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, каде што $r_1 = |z_1|$ и $r_2 = |z_2|$. Тогаш $z_1 + z_2 = r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2 + i(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2)$ од каде што следува

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2)^2 + (r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2)^2 = \\ &= r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2r_1 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + r_2^2 \cos^2 \varphi_2 + r_1^2 \sin^2 \varphi_1 + 2r_1 r_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + r_2^2 \sin^2 \varphi_2 = \\ &= r_1^2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) + 2r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + r_2^2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) = \\ &= r_1^2 + 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + r_2^2. \end{aligned}$$

Заради $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \leq 1$ добиваме дека $|z_1 + z_2|^2 \leq r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2$, од каде што следува $|z_1 + z_2| \leq r_1 + r_2 = |z_1| + |z_2|$, што требаше да се докаже.

За докажување на неравенството 3, ќе го искористиме неравенството 2, каде што $z_1 = (z_1 + z_2) - z_2$. Притоа добиваме $|z_1| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$, односно $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

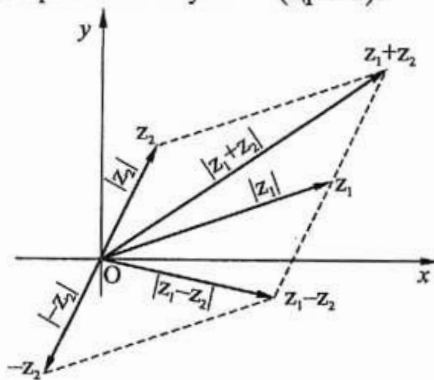
Од $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \geq |z_1| - |z_2|$ следува неравенството 4.

Сите докажани неравенства имаат свое јасно геометриско толкување (црт. 1).

Ако точката O и точките определени со z_1 и z_2 не лежат на една права, тогаш триаголникот со темиња O , z_1 , и $z_1 + z_2$ има должини на страните $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1 + z_2|$.

Од веќе познатото „неравенство на триаголник“ страните на триаголникот се помали од збирот на другите две страни, па ги добиваме неравенствата 1 и 2.

Неравенствата 3 и 4 се очигледни со разгледување на триаголникот со темиња O , z_1 , z_2 . Должините на неговите две страни се $|z_1|$ и $|z_2|$.



црт. 1

Должината на третата страна е еднаква на $|z_1 - z_2|$. Со користење на неравенството на триаголник, ги добиваме неравенствата 3 и 4.

Неравенствата 3 и 4 се користат за докажување на неравенствата:

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (3')$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (4')$$

Навистина, од $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ и $|z_1 + z_2| = |z_2 + z_1| \geq |z_2| - |z_1| = -(|z_1| - |z_2|)$ следува 3'. Неравенството (4') се добива од неравенството (3'), со замена на z_2 со $-z_2$.

Неравенството 1 е исполнето и за збир на конечно многу комплексни броеви, односно:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

Слично, неравенството 3 е исполнето за збир конечно многу комплексни броеви, односно:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \geq |z_1| - |z_2 + \dots + z_n| \geq |z_1| - |z_2| - \dots - |z_n|$$

Значи, добиваме дека неравенството 3 е исполнето за конечен збир од комплексни броеви, што е добро за оценка на збирот оддолу: модулот од збир на конечен број на комплексни броеви е поголем од разликата на модулите на секој комплексен број.



Задачи за самостојна работа

1. Докажи дека за секои два комплексни броја z_1 и z_2 важи:

а) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$,

б) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Искажи барем едно геометриско толкување на овие релации.

2. За секој комплексен број z ($z \neq 0$) точките што одговараат на броевите z , iz , $i^2 z$, $i^3 z$ се темиња на квадрат. Докажи!

3. Со методот на математичката индукција докажи го неравенството:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

4. Провери ги неравенствата:

а) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

б) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$,

в) $|z_1 - z_2| \leq |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1|$,

за броевите: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = -2 - i$.

6.6. Примена на комплексните броеви во тригонометриска форма

Примената на комплексните броеви запишани во тригонометриска форма ќе ја илустрираме со неколку примери.

Пример 1 Пресметај: $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2(-1 - i)} \right)^{12}$.

Решение. Дадениот израз го претставува комплексниот број $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12}$ каде што

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } z_2 = -1 - i.$$

За комплексниот број z_1 имаме: $r_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, од каде што

следува дека $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$. Но, знаеме дека и $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$ што укажува на фактот дека треба да се внимава при одредување на аголот φ_1 . Кој агол ќе го земеме зависи од положбата на точката (x, y) во координатната рамнина, која одговара на комплексниот број z_1 . Овде ја имаме точката $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а тоа е во прв квадрант, значи $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

Забележуваме уште дека $\frac{4\pi}{3} \notin (-\pi, \pi]$.

За комплексниот број z_2 имаме: $r_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Притоа точката $(-1, -1)$ е во трет квадрант, па $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$ и $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$.

Значи имаме:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12} &= \frac{(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^{12}}{(\sqrt{2})^{12} \cdot (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})^{12}} = \frac{\cos \frac{12\pi}{3} + i \sin \frac{12\pi}{3}}{2^6 (\cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4})} = \\ &= \frac{\cos 4\pi + i \sin 4\pi}{64(\cos 15\pi + i \sin 15\pi)} = \frac{1 + i \cdot 0}{64(-1 + i \cdot 0)} = -\frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Пример 2 Докажи дека $\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n = \frac{1 + i \operatorname{tg} n\alpha}{1 - i \operatorname{tg} n\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n &= \left(\frac{1 + i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}\right)^n = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n} = \\ &= \frac{\cos n\alpha + i \sin n\alpha}{\cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha)} = \frac{\cos n\alpha + i \sin n\alpha}{\cos n\alpha - i \sin n\alpha} = \frac{1 + i \operatorname{tg} n\alpha}{1 - i \operatorname{tg} n\alpha}. \end{aligned}$$

Пример 3 Реши ја биномната равенка: $x^5 + 32i = 0$.

Решение. Од $x^5 + 32i = 0$ имаме $x = \sqrt[5]{-32i}$. Бројот $-i$ ќе го запишеме во тригонометриска форма, земајќи дека $x^5 = -32i = 32(-i)$.

Заради $-i = \cos(-90^\circ) + i\sin(-90^\circ)$ имаме $x^5 = 32(\cos(-90^\circ) + i\sin(-90^\circ))$. Тогаш $x = 2(\cos(-18^\circ + 72^\circ k) + i\sin(-18^\circ + 72^\circ k))$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

За $k = 0$, $z_0 = 2(\cos 18^\circ - i\sin 18^\circ) = 1,90 - i0,62$.

За $k = 1$, $z_1 = 2(\cos 54^\circ + i\sin 54^\circ) = 1,18 - i1,62$.

За $k = 2$, $z_2 = 2(\cos 126^\circ + i\sin 126^\circ) = -1,18 - i1,62$.

За $k = 3$, $z_3 = 2(\cos 198^\circ + i\sin 198^\circ) = -1,18 - i1,62$.

За $k = 4$, $z_4 = 2(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ) = -2i$.

Пример 4 Реши ја равенката: $\frac{z^3}{32} - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 0$.

Решение. Од дадената равенка $z = \sqrt[3]{32\sqrt{2} - 32i\sqrt{2}}$. За комплексниот број $32\sqrt{2} - 32i\sqrt{2}$ имаме: $r = \sqrt{2 \cdot 1024 + 2 \cdot 1024} = 64$, $\operatorname{tg} \varphi = -1$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, бидејќи точката $(32\sqrt{2}, -32\sqrt{2})$ е во четвртиот квадрант, па според тоа:

$$z = \sqrt[3]{64} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$\begin{aligned} \text{За } k = 0 \text{ имаме } z_0 &= 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right) = \\ &= 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2i\sqrt{2+\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\text{За } k = 1 \text{ имаме } z_1 = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i\sin \frac{7\pi}{12} \right) = -2\sqrt{2-\sqrt{3}} + 2i\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

$$\text{За } k = 2 \text{ имаме } z_2 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i\sin \frac{5\pi}{4} \right) = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}.$$

Пример 5 Најди ги конечните зборови:

$A = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ и $B = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$.

Решение. Нака $z = A + iB$. Тогаш $A = \operatorname{Re}(z)$ и $B = \operatorname{Im}(z)$. Од

$$\begin{aligned} z = A + iB &= (\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx) + i(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) = \\ &= (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \dots + (\cos nx + i\sin nx) = \\ &= (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^2 + \dots + (\cos x + i\sin x)^n = \\ &= (\cos x + i\sin x) \frac{1 - (\cos x + i\sin x)^n}{1 - (\cos x + i\sin x)} = (\cos x + i\sin x) \frac{1 - (\cos nx + i\sin nx)}{1 - (\cos x + i\sin x)} = \\ &= (\cos x + i\sin x) \frac{1 - (\cos nx + i\sin nx)}{(1 - \cos x) - i\sin x} \cdot \frac{(1 - \cos x) + i\sin x}{(1 - \cos x) + i\sin x} = \\ &= \frac{[1 - (\cos nx + i\sin nx)][(\cos x - 1) + i\sin x]}{2(1 - \cos x)} \end{aligned}$$

по извршување на назначените операции со примена на адиционите формули добиваме дека

$$z = A + iB = \frac{\cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + i \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{од каде што следува дека}$$

$$A = \frac{\cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad B = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$



Задачи за самостојна работа

1. Запиши го во алгебарска форма комплексниот број $z = (1 + \cos \alpha - i \sin \alpha)^{10}$.

2. Реша ја равенката $z^4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) - z^4 - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = 0$.

3. Докажи дека:

a) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right),$

б) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right).$

4. Реша ги биномните равенки:

a) $z^3 - 8 = 0,$

б) $z^6 + 64 = 0,$

в) $z^4 - 81 = 0.$

5. Најди ги конечните зборови:

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx,$

б) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx.$

6.7. Задачи за вежбање

1. Претстави ги со вектор комплексните броеви z_1 и z_2 , а потоа најди го нивниот збир, ако:

a) $z_1 = 2 + 5i, \quad z_2 = 3 + 2i;$

б) $z_1 = -2 + 3i, \quad z_2 = 5 - 2i;$

в) $z_1 = -3 + 4i, \quad z_2 = -2 - 3i;$

г) $z_1 = -1 + 3i, \quad z_2 = 3 - i;$

2. Најди ја геометриски разликата на z_1 и z_2 , ако:

a) $z_1 = 4 + 3i, \quad z_2 = 1 - i;$

б) $z_1 = -3 + 5i, \quad z_2 = -5 + 2i;$

в) $z_1 = -2 - 4i, \quad z_2 = -5 - 2i;$

г) $z_1 = 6 - 2i, \quad z_2 = 2 + 3i;$

3. Најди модул на комплексните броеви:

a) $12 - 5i,$

б) $-\sqrt{3} + i,$

в) $1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)i,$

г) $\sin \varphi - i \cos \varphi,$

д) $-2i,$

е) $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi.$

4. Најди го растојанието меѓу точките во рамнината, кои ги претставуваат комплексните броеви:

a) $1 - i$ и $-2 + 3i,$

б) $5 - i$ и $-3 + 5i,$

в) 1 и $\cos \varphi - i \sin \varphi.$

5. Најди ги точките во комплексната рамнина кои го исполнуваат условот:

а) $|z-i| \leq 1$, б) $|z-1|=1$, в) $1 \leq |z| \leq 3$, г) $|z-1|=|z-3|$.

6. Претстави ги во тригонометриска форма комплексните броеви:

а) $\sqrt{3}+1$, б) $-1-i\sqrt{3}$, в) $-3i$, г) -3 , д) $3-4i$.

7. Шрафирај го множеството точки во рамнината кои соодветствуваат на комплексните броеви со модул r чии аргументите го исполнуваат условот:

а) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, б) $0 < \varphi < \pi$, в) $2 < r < 3$, г) $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

8. Најди ги сите вредности за аргументот φ на комплексниот број:

а) $-1+i$, б) -1 , в) $\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$.
г) $1-i\sqrt{3}$, д) $\operatorname{tg} \varphi + i$, е) $\operatorname{ctg} \alpha + i$.

9. Помножи ги комплексните броеви:

а) $z_1 = 5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$ и $z_2 = 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$,

б) $z_1 = 4(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ и $z_2 = 3(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8})$,

в) $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ и $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$.

10. Најди го модулот и аргументот на бројот z^n , ако $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$.

11. Како ќе се промени модулот и аргументот на комплексниот број $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ако се помножи со:

а) i , б) $-i$, в) 4 ,
г) $-2i$, д) $1+i$, е) $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

12. Подели ги комплексните броеви:

а) $z_1 = \cos 130^\circ + i \sin 130^\circ$ и $z_2 = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ$,

б) $z_1 = 2(\cos 107^\circ + i \sin 107^\circ)$ и $z_2 = 5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ)$,

в) $z_1 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ и $z_2 = 3(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$,

г) $z_1 = \cos 70^\circ + i \sin 70^\circ$ и $z_2 = \cos 100^\circ + i \sin 100^\circ$.

13. Изврши го степенувањето:

а) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$, б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^3$, в) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$, г) $(-1+i)^{-5}$.

14. Пресметај:

а) $\frac{(i-1)^7}{(1+i)^5}$, б) $\frac{(1+i)^8 - (1-i)^4}{(\sqrt{3}+i)^6}$, в) $\frac{(1-i)^{-8}}{(1+i\sqrt{3})^6}$, г) $(\sqrt{3}+i)^{10} + (\sqrt{3}-i)^{10}$.

15. Провери ги равенствата:

а) $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$, б) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$.

16. Најди ги корените на равенките:

а) $x^2 + 16 = 0$,

б) $x^2 + 20 = 0$.

17. Реши ги квадратните равенки:

а) $x^2 - 4x + 20 = 0$,

б) $x^2 + 3x + 8 = 0$,

в) $2x^2 - 7x + 10 = 0$,

г) $z^2 + z + 1 = 0$,

д) $x^2 - (1+i)x + i = 0$.

18. Состави квадратни равенки со реални коефициенти чии корени се:

а) $x_1 = 2 + i$, $x_2 = 2 - i$;

б) $x_1 = i\sqrt{5}$, $x_2 = -i\sqrt{5}$.

19. Состави квадратна равенка со реални коефициенти, ако еден од корените е:

а) $2 + 3i$,

б) $12 - 13i$,

в) $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$.

20. Реши ги равенките:

а) $z^2 + 27 = 0$,

б) $z^5 - 1 = 0$,

в) $z^7 + 1 = 0$,

г) $36z^4 - 25 = 0$,

д) $z^6 + 64 = 0$,

е) $z^3 - 2i = 0$,

ж) $z^5 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$,

з) $z^8 - \sqrt{3} + i = 0$,

с) $z^7 + 1 - i = 0$.

Одговори и решенија на задачите

ТЕМА 1

- 1.1. 1. а) a^3 , б) $\sqrt{a^5}$, в) $\sqrt[3]{a^5}$, г) $\sqrt{a^5}$; 2. а) $a^3\sqrt{b^9}$, б) $\sqrt{a^3b^5}$, в) $\sqrt{a^3}\sqrt[3]{b^9}$, г) $\frac{a}{\sqrt[3]{b^4}}$; 3. а) $\sqrt{5xy}$, б) $\sqrt{2x^3y}$, в) $\sqrt{3ab}$, г) $b^2\sqrt{2a^3c}$; 4. а) $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[3]{a^5}$, б) $\sqrt[24]{x^{20}}$, $\sqrt[24]{x^9}$, $\sqrt[24]{x^{24}}$, в) $\sqrt[30]{a^{15}}$, $\sqrt[30]{a^{20}}$, $\sqrt[30]{a^{21}}$, г) $\sqrt[30]{a^{24}}$, $\sqrt[30]{a^{27}}$, $\sqrt[30]{a^{14}}$; 5. а) $\sqrt[60]{x^{24}}$, $\sqrt[60]{x^{24}y^{40}}$, $\sqrt[60]{x^{45}y^{15}}$, б) $\sqrt[30]{a^{24}}$, $\sqrt[30]{a^{27}}$, $\sqrt[30]{a^{14}}$, в) $\sqrt[10]{a^5}$, $\sqrt[10]{a^6}$, $\sqrt[10]{a^7}$, г) $\sqrt[24]{a^{20}b^4}$, $\sqrt[24]{a^{18}}$, $\sqrt[24]{a^{21}b^{15}}$; 6. а) 0,25, б) 0,78, в) 0,03, г) 0,14, 7. а) $\frac{3}{2}$, б) $\frac{5}{3}$, в) 10, г) 3; 8. а) $\sqrt{2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$, в) $7 \cdot 11 \cdot 13$; 9. а) 13, б) 17, в) 12, г) 36; 10. б) 15, в) -12, г) 0,88068
- 1.2. 1. а) $2\sqrt{2}$, б) $3\sqrt{5}$, в) $x\sqrt{x}$, г) $\frac{a}{b^2}$; 2. а) $\frac{1}{7}\sqrt{35}$, б) $\frac{1}{4}\sqrt{6}$, в) $\frac{1}{2}\sqrt{6a}$, г) $\frac{1}{b}\sqrt{ab}$; 3. а) $2\sqrt{10}$, б) $\sqrt{15}$, в) $6xyz\sqrt{2y}$, г) $3\sqrt{ab}$, д) $x\sqrt{3xy}$, е) $\frac{1}{2}\sqrt{2bcxy}$, ж) $2(x^2+1)\sqrt{xy}$, з) $(a-3)\sqrt{a-3}$, с) $(a-5)^3$, с) $(a-3)(a-5)^2\sqrt{a-3}$; 4. а) 3 и $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ не се слични, б) $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}$ се слични, в) $\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$ и $\sqrt{216} = 6\sqrt{6}$ се слични, г) $\sqrt{905} = 181\sqrt{5}$ и $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ не се слични, д) не се слични, е) се слични; 5. а) $\sqrt{5(n-m)}$, б) $\sqrt{3(n+m)}$, в) $\sqrt{2|n-m| - \sqrt{2}(n+m)}$, г) $\sqrt{3|a-1| - \sqrt{3}(a+1)}$; 6. а) $\frac{1}{x+y}\sqrt[3]{yx(x+y)^2}$, б) $\frac{x}{a^2+b^2}\sqrt{x(a^2+b^2)}$, в) $\frac{1}{xy}\sqrt{(x^2+y^2)xy}$, г) $\frac{1}{a+b}\sqrt[3]{a(a+b)}$, д) $\frac{1}{b}\sqrt[5]{ab^4}$
- 1.3. 1. а) $9\sqrt{3}$, б) $-2\sqrt{5}$, в) $-17\sqrt{2}$, г) $(x+2y^2z-z^3)\sqrt{xyz}$; 2. а) $(15x^3y-x)\sqrt{3y-x^2}\sqrt{2y}$, б) $(3b^2-2ab-1)\sqrt[3]{3a^2}$; 3. а) $4\sqrt{a}\sqrt{x}$, б) $b^2\frac{\sqrt{a}}{c}$; 4. а) $a\sqrt{10b}$, б) $3b\sqrt{a}$, в) $x\sqrt[4]{x^4}$, г) $x\sqrt[4]{x}$, д) $ab\sqrt[4]{a^5b^7}$, е) $\frac{1}{b^2}\sqrt[6]{ab^5}$; 5. а) 4, б) 4, в) $\frac{\sqrt{b}}{b}$, г) $\frac{1}{a}\sqrt[24]{a^{17}}$, д) $\sqrt[12]{a^{11}}$, е) $\frac{1}{y}\sqrt[9]{a^5b^3x^2y^8}$, ж) $\sqrt[4]{(x-1)(x+1)}$; 6. а) $a^3\sqrt[3]{a}$, б) $a^3\sqrt[3]{a^2}$, в) $a^2c^2\sqrt[4]{a^2b^4c^6}$, г) $\frac{x^4\sqrt[3]{(x-y)^2}}{(x-y)^2}$, е) $\frac{(m+n)^3}{(m-n)^2}\sqrt[3]{(m+n)(m-n)}$, д) $\frac{b}{a}\sqrt[3]{ab}$; 7. а) $\sqrt[10]{a^3}$, б) $ab\sqrt[3]{ab^2}$, в) $\frac{1}{b}\sqrt[4]{a^2b^5}$, г) $\sqrt[6]{3^3 \cdot 2}$, д) $\sqrt[18]{x^{13}y^{11}}$, е) $a\sqrt[3]{a}$, ж) $a^2\sqrt[4]{a}$
- 1.4. 1. а) $\frac{3}{10}\sqrt{5}$, б) $\frac{5\sqrt{ab}}{3}$, в) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}$, г) $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{b}$; 2. а) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$, б) $\frac{(a+b)\sqrt{a-b}}{2(a-b)}$, в) $\frac{\sqrt[3]{(a^2-9)^2}}{a-3}$; 3. а) $\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$, б) $-1+\sqrt{6}$, в) $2\sqrt{5}(\sqrt{6}+\sqrt{3})$, г) $-24\sqrt{2}-12\sqrt{7}$; 4. а) $5+2\sqrt{6}$, б) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a-b}$, в) $5-2\sqrt{6}$, г) $\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$; 5. а) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4}$, б) $2(\sqrt{11^2}+\sqrt[3]{55}+\sqrt[3]{5^2})$; 6. а) $\frac{3}{4\sqrt{6}}$, б) $\frac{5b}{6\sqrt{a}}$, в) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, г) $\frac{x}{a\sqrt[4]{x^{n-1}}}$; 7. а) $\frac{1}{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$, б) $\frac{1}{24+5\sqrt{21}}$, в) $\frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, г) $\frac{1-\sqrt{6}}{5(1-\sqrt{6}+\sqrt{5})}$
- 1.5. 1. а) $\sqrt{10}+1$, б) $\frac{\sqrt{22}+\sqrt{2}}{2}$, в) $\sqrt{15}-\sqrt{2}$, г) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} - \sqrt{\frac{a-b}{2}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}{2}, & b \geq 0 \\ \frac{\sqrt{2}(\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b})}{2}, & -b < 0 \end{cases}$; 2. а) $3-\sqrt{5}$, б) $\sqrt{5}-2$, в) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, г) $\sqrt{10-10\sqrt{2}}$, не е исполнет условот $a^2 \geq b$ т. е. $10^2 < 200$; 5. а) $\sqrt{x}-1$, б) $2\sqrt{x}$
- 1.6. 1. а) $-\frac{12}{7}\sqrt{2}$, б) $\frac{2(a^2+b)}{a^2-b}$; 2. а) $5\sqrt{3}$, б) $1-\sqrt{11}$; 3. а) 0, б) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}$
- 1.7. 1. а) $x \geq 2$, б) $x \geq 1$
2. а) левата страна е секогаш ненегативна; б) збир на два ненегативни броја е ненегативен број; в) мора секој од собирите да е нула, а тоа не е можно за иста вредност на променливата; г) $D_f = \emptyset$, д) десната страна не е дефинирана, е) кога едниот од корените постои, другиот не постои.
- 1.8. 1. а) $x=32$, б) $x=2$, в) $x=\frac{1}{4}$ и $x=\frac{5}{4}$; 2. а) $x=25$, б) $x=7\frac{7}{9}$; 3. а) $x=5$, б) нема решение; 4. а) $x=0$ и $x=1$, б) $x=0$ и $x=1$; 5. а) $x=1$, б) $x=\frac{16}{25}$

- 1.9. 1. а) $4\sqrt{3}$, б) $0,22\sqrt{2}$, в) $\frac{7}{12}\sqrt{5}$, г) $\sqrt{a}$; 2. а) $2\sqrt[3]{2}-3\sqrt{2}$, б) $4\sqrt[3]{a}-6\sqrt{a}$, в) $3\sqrt{5}-4\sqrt[3]{5}$, г) $4\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}$; 3. а) $|a-b|$, б) $|a+b|$, в) $|2x-5y|$; 4. а) 15, б) 20, в) 108, г) 336, 5. а) $\frac{3}{5}$, б) $\frac{5}{4}$, в) $\frac{7}{6}$, г) $\frac{12}{7}$, 6. а) ab^3 , б) a^5b , в) $6ab^3c\sqrt{c}$, г) $3a^3b^4\sqrt{3b}$, 7. а) $\frac{a}{4b^2}$, б) $\frac{6a^3}{7bc^2}$, в) $\frac{x^n}{y^m}$, г) $\frac{a^{10}b^{3x}}{c^{2y}}$; 8. а) $2\sqrt{a}$, б) $3x\sqrt{y}$, в) $a\sqrt{2-5b}$, г) $\frac{|a+b|\sqrt{b}}{b^2}$, д) $\frac{(x^2-y^2)\sqrt{2(x+y)}}{4}$, 9. а) $3b\sqrt{a}$, б) $6a^2b^2$, в) a^5b^{-6} , 10. а) 4, б) $x^{-3}y^{-2}$, в) $\frac{1}{x}\sqrt{y}$, 11. а) $a\sqrt[7]{a^7}$, б) $a^2\sqrt[9]{a}$, в) $\frac{1}{a}\sqrt[12]{ab}$, 12. а) $\frac{1}{a}\sqrt[24]{a^{17}}$, б) $\sqrt[4]{a^{11}}$, в) $\frac{1}{x}\sqrt[4]{x^2(x^2-1)}$, 13. а) $a^3\sqrt[5]{a^2}$, б) $a^2c^2\sqrt[4]{a^2b^4c^6}$, в) $-\frac{1}{32}\frac{x^3}{y^4}\sqrt[4]{x^3y}$, г) $3x^4a\sqrt{3ax}$, 14. а) $\sqrt[19]{a^3b^2}$, б) $3\sqrt[5]{a^{13}}$, в) $a\sqrt[24]{a^7}$, г) $a\sqrt[60]{a^{11}}$, 15. а) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$, б) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$, в) $\frac{\sqrt{b}}{b}$, г) $\frac{\sqrt{(a^2-9)^2}}{a-3}$, 16. а) $\frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}$, б) $\frac{a(b+\sqrt{ab})}{a-b}$, в) $-\frac{4(2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{3}$, г) $-\frac{7(3\sqrt{5}+5\sqrt{3})}{6}$, 17. а) $-\frac{40}{177}$, б) $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x-y}$, в) $\frac{73+6\sqrt{35}}{17}$, г) $\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$; 18. а) $\sqrt{1-x}$, б) $\frac{1}{b}$, в) $a(\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b})$, г) $2b(a-b)$, д) $\frac{6+2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2)}{3+2\sqrt{6}}$, е) $\frac{4}{\sqrt{x-y}}$; 20. Користејќи го Лагранжовиот идентитет се добива:

$$x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, y = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, x+y = \sqrt{5+\sqrt{20}}+1, x^2+y^2 = 8+2\sqrt{5-\sqrt{20}} \text{ и } xy = \sqrt{5}-1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
21. а) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$, б) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)}{2}$, в) $2+\sqrt{3}$, 22. а) $x=3$, б) $x=11$, в) $x=32$, г) $x=1$, 23. а) $x=1$, б) нема решение
в) $\frac{207}{7}$, г) $\frac{10}{11}$; 24. а) нема решение, б) $x=34$ и $x=2$, в) $x=2$, г) $x=3$, 25. а) $x=40$, б) $x=3$, 26. а) за $a \geq 0, x=a$ и за $a < 0, x=-a$, б) за $a=0, x=0$ и за $a \geq 1, x = \frac{(a-1)^2}{4}$, в) за $a \geq 1, x = \frac{\sqrt{a^4+6a^2+1}}{2a}$, г) нема решение; 27. а) левата страна е секогаш ненегативна, б) секој од собирците е нула за различни вредности на променливата, в) збир на два ненегативни броја е ненегативен број, г) $D_f = \emptyset$, 28. а) $x=-2$, б) нема решение, в) $x=-1$.

ТЕМА 2

- 2.1. 4. Само a_n ; 5. n ; 8. $n=32$;
2.2. 2. 60; 3. $n=8$ и $n=12$; 4. 180; 5. 2394, 2384; 6. а) 31-12-72 б) 31-20-48
2.3. 1. а) да, б) не, в) да; 8. а) 6, б) 6, в) 7; 9. а) 16, б) 5, в) 1; 10. да, не;
2.4. 4. 2, 3, 4, 7;
2.5. 1. 8, 16, 36, 300, 320; 3. $\varphi(m \cdot n) > \varphi(m) \cdot \varphi(n)$; 4. д.; 6. а) $m=11$, б) $m=20$, $m=16$; 7. Нека $x=6$;
2.6. 9. 6;
2.7. 1. а) 3, б) 30; 2. а) 4, б) 5; 3. а) 7, б) 151.
2.8. 1. $x=|d(u^2-2v^2)|$, $y=2duv$, $w=d(u^2+2v^2)$, $u, v, d > 0$ 2. $x=|d(u^2-3v^2)/2|$, $y=duv$, $w=d(u^2+3v^2)/2$, $u, v, d > 0$, d парен, u, v различна парност; 3. $x=2(u^2-v^2)$, $y=4uv$, $w=u^2+v^2$, $u > v > 0$, u, v различна парност и $\text{НЗД}(u, v)=1$.
2.9. 1. (0,0,0)
2.10. 1. $n=5$; 2. $3\sqrt{4}$; 4. $m=576$, $n=162$; 6. $n=144$; 7. 2; 12. 0,1,2; 16. 1; 21. а) нема, б) 46; 22. а) 11, б) 34; 23. $x=4$, $y=0$; 24. а) $x=y=2$, б) нема, в) $x=3$, $y=2$; 25. нема; 26. единствени решенија се 0,0,0; 27. нема; 30. а) $x=1$, $x=3$, б) $x=2$, $x=6$, $x=7$, $x=13$, в) $x=3$, $x=4$, г) $x=3$

ТЕМА 3

3. 1. 2. а), в), г). 3. б), в). 4. а) предикат со една променлива, б) предикат со две променливи, в) предикат со три променливи, г) исказ, д) предикат со една променлива.
5. а) $\{1,2,3,4\}$, б) $\{4,5,6\}$, в) $\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (2,2), (2,3), (3,2)\}$.
3. 2. 2. а) 5, б) а, в) 0, г) $\frac{1}{3}$, д) 0,45, 3. а) 12, б) 264, в) 12852. 4. а) $x \in (-1,1)$, б) $x \in [1, \infty) \cup (-\infty, -1]$, в) $\mathbb{R}$, г) $x \in (-1,5)$, д) $x \in (-\infty, -2,5) \cup (1,5, \infty)$, е) $x \in (-1,4)$. 5. а) $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$, б) $x \in (-\infty, \frac{4}{3}) \cup [8, \infty)$, в) $x \in [-\frac{1}{3}, 3]$.
3. 3. 1. Упатство: Докажи со помош на индукција по n . 2. Упатство: Во својство 3 замени го a со b и обратно.
3. $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2} = \sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+\dots+|a_n|^2} \leq \sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+\dots+|a_n|^2+2|a_1||a_2|+\dots+2|a_{n-1}||a_n|} =$
 $= \sqrt{(|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|)^2} = |a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|.$

3. 4. 1. а) $S_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i} + \sum_{i < j} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) = n + \sum_{i < j} \frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i a_j}$. Но, $\frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i a_j} = 2 + \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \leq 2$, па добиваме $S_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq n + \sum_{i < j} 2 = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2$; б) $\left(a_1 + \frac{1}{a_1} \right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2 + \frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} + 2n = n \left(\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} + \frac{\frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}}{n} + 2 \right)$. Но, $\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{S_n}{n}$ и користејќи го резултатот под а), добиваме $\sqrt{\frac{\frac{1}{a_1^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}}{n}} \geq \frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \frac{n}{S_n}$, па оттука $\left(a_1 + \frac{1}{a_1} \right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)^2 \geq n \left[\left(\frac{S_n}{n} \right)^2 + \left(\frac{n}{S_n} \right)^2 + 2 \right] = n \left[\frac{S_n^2}{n^2} + \frac{n^2}{S_n^2} + 2 \right] = n \left[\frac{S_n}{n} + \frac{n}{S_n} \right]^2$.
2. Користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме $\frac{1+a_1}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_1} = \sqrt{a_1}$, $\frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_2}$, ..., $\frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{a_n}$. Множејќи ги овие неравенства добиваме $\frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}{2^n} \geq \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} = \sqrt{1} = 1$, т.е. $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$.
3. 5. 1. **Упатство:** докажи најпрво дека $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + \dots + (a_1 + \dots + a_{n-1})(b_{n-1} - b_n) + (a_1 + \dots + a_n)b_n$
2. Во правоаголен координатен систем ги означуваме точките $A_0(0,0)$, $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, ..., $A_n(a_1 + a_2 + \dots + a_n, b_1 + b_2 + \dots + b_n)$. Тогаш, $\overline{A_0 A_n} = \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}$, а $\overline{A_0 A_1} + \overline{A_1 A_2} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Даденото неравенство важи бидејќи $\overline{A_0 A_n} \leq \overline{A_0 A_1} + \overline{A_1 A_2} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n}$. Равенство важи ако и само ако точките $A_0, A_1, \dots, A_n$ се колинеарни, т.е. ако и само ако $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.
3. Ако се помножат неравенствата $1 \cdot n \geq n$, $2 \cdot (n-1) \geq n$, $3 \cdot (n-2) \geq n$, ..., $n \cdot 1 \geq n$ се добива $n! \cdot n! \geq n^n$, т.е. $n! \geq n^{n/2}$.
4. $\frac{1}{2}(\sin x + \sin y) = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}$, бидејќи $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x-y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, $1 \geq \cos \frac{x-y}{2} \geq 0$ и $\sin \frac{x+y}{2} \geq 0$.
3. 6. 1. а) $x \in (-\infty, 13)$, б) $x \in (-1, \infty)$, в) $x \in (-\infty, 15)$, г) $x \in (-\infty, 2,625)$, д) $x \in (1, \infty)$. 2. $x \in (\frac{11}{6}, \frac{9}{2})$, б) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, в) $x \in (0, \infty)$.
3. а) $|x+2| < 3$, б) $|x+\frac{1}{3}| < \frac{1}{2}$, в) $|\frac{x+1}{x+2}| < 1,5$;
4. $(n!)^2 = [1 \cdot n] \cdot [2 \cdot (n-1)] \cdot [3 \cdot (n-2)] \cdot \dots \cdot [n \cdot 1] \leq \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1+n}{2}\right) = \left(\frac{1+n}{2}\right)^{2n}$, од каде е $n! \leq \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$.
5. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $\frac{\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{b_n}} = \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_n}} = \sqrt[n]{1} = 1$.
6. **Упатство:** Даденото неравенство трансформирај го во обликот $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{c-a} \geq 1$ и користи дека $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} \geq 1$ (зошто?).
8. **Упатство:** Замени $x = -2y + 0,5$ во неравенството, а потоа докажи го.
9. **Упатство:** Користи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Равенство важи ако а) $a=6$, б) $a=1$.
10. Со квадрирање на неравенството $a+b \geq 1$ добиваме $2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 \geq 1$, т.е. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$. Со повторно квадрирање добиваме $2(a^4 + b^4) \geq a^4 + b^4 + 2a^2 b^2 = (a^2 + b^2)^2 \geq \frac{1}{4}$, т.е. $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.
11. Бидејќи $a, b, c \geq 1$, добиваме $ab \leq abc$, $bc \leq abc$ и $ca \leq abc$, па со нивно собирање го добиваме бараното неравенство.
12. Даденото неравенство е еквивалентно со $(y+z)(x+z)(x+y) \geq 8xyz$, т.е. $x^2 y + xy^2 + y^2 z + yz^2 + x^2 z + xz^2 \geq 6xyz$. Последново неравенство се докажува користејќи го неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина, имено $x^2 y + xy^2 + y^2 z + yz^2 + x^2 z + xz^2 \geq 6\sqrt{x^2 y \cdot xy^2 \cdot y^2 z \cdot yz^2 \cdot x^2 z \cdot xz^2} = 6xyz$.
13. Нека $x+y+z=1$. Тогаш $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$. Ако ова равенство го собереме со неравенствата $(x-y)^2 \geq 0$, $(x-z)^2 \geq 0$ и $(y-z)^2 \geq 0$,

добиваме $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 1$, т.е. $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$. 14. $ab+1 < a+b \Leftrightarrow 0 < (1-b)(a-1)$ и последното неравенство е задоволено бидейќи $b < 1$ и $1 < a$.

ТЕМА 4

4.1. 1. а) $P(-2) = -31$, б) $Q(-1) = 7$, в) $R(-2) = 43$; 2. $P(-1) = -4$, $P(4) = 0$;
3. а) $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = (x^2-4)$, б) $x^4+x^2+x = x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2+1)^2-x^2 =$
 $= (x^2+1+x)(x^2+1-x)$, в) $(x^6-1) = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; 4. а) $b_0=0$, $a_0=-4$, $b_2=-2$, $b_3=1$, б) $A=2$, $C=-1$, $D=3$, $F=-5$, в) Од
 $(x-2)^3+c = x^3-2x^2+c = x^3-6x+7$ добиваме $-2a=-6$, $a^2+c=7$, односно $a=2$ и $c=-2$.

4.2. 1. $P(x)+Q(x)=2x^3-3x+5$; 2. $A \cdot B = 3x^6-11x^5+22x^4-17x^3+18x^2-23x+5$;
6) $P \cdot Q = 6x^6-7x^5+16x^4-20x^3+10x^2-17x+4$; 3. а) $x^6-2x^5-5x^4+4x^3-4x^2+x+2$, б) $x^4-3x^3-2x^2+12x-8$
в) $x^5-x^4-9x^3-23x^2+24x+36$; 4. а) $x^7+2x^6+2x^4-5x^3+4x-7$, б) $x^5+x^4+6x^3+10x^2+6x$

4.3. 1. $q(x)=x^2+3x-4$, $r(x)=2x-7$; 2. а) $q(x)=2x^2+3x+11$, $r(x)=25x-6$, б) $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$, $r(x)=\frac{16}{9}x-\frac{32}{9}$, в) $q(x)=x^3+4x^2-4x-2$,
 $r(x)=6x+5$, г) $q(x)=x^3-x$, $r(x)=x-1$, д) $q(x)=x^2-1$, $r(x)=-x^2-x$; 3. $q(x)=2x^2+5x^2+13x+42$, $r=127$; 4. а) $q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$,
 $r=-322$, б) $q(x)=x^3-2x^2-2x$, $r=-1$, в) $q(x)=x^2+(-2+i)x-2i$, $r=1$, г) $q(x)=4x^2-(3+4i)x-1+7i$, $r=8-6i$; 5. $r=-2$

4.4. 1. Полиномите под а), б), г) делив, в) не е делив; 4. При услов $a=-c^2-1$, $b=c$.

4.5. 1. Од дадените броеви нули на $f(x)$ се: -2 , 1 и 2 ; 2. Бројот -1 е заедничка нула на $f(x)$ и $g(x)$; бројот 3 е нула само на $f(x)$, а
бројот $\frac{1}{2}$ е нула само на $g(x)$; 3. Бројот $x=-2$ е трикратна нула на $f(x)$; 4. Идентични се, $f(x)=\varphi(x)$.

4.6. 1. $D(f,g)=x^2+7x+12$, б) $D(A,B)=x^2+1$; 2. а) $D(f,g)=x^3+1$, б) $D(f,g)=x+2$, в) $D(f,g)=1$, г) $D(f,g)=x^2-2x-3$.

4.7. 1. а) $x_1=-3$, $x_2=2$, б) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=3$; 2. а) $x_1=\frac{3}{4}$, б) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-2$; 3. а) $f(x)=(x+2)^3(x^2+1)$, б) $g(x)=(x+1)(x+2)(x-3)(x^2+1)$,
в) $\varphi(x)=(x+1)(x+3)(x+4)$

4.8. 1. $m=-3$, $n=2$; 2. $a=3$, $b=-2$; 3. При услов $a=-c^2-1$, $b=c$; 4. $a=3$, $b=-4$.

4.9. 1. $P(x)=x^4-5x^3+x^2+5x-6$; 2. $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1 \cdot x_2+x_1 \cdot x_3+x_2 \cdot x_3=a$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=-b$ и при услов $x_2=x_3$, $x_1+2x_2=0$, $2x_1 \cdot x_2+x_2^2=a$, $x_1 \cdot x_2^2=-b$,
 $x_1=-\frac{3b}{a}$, $x_2=x_3=-\frac{3b}{2a}$ при услов $4a^3+27b^2=0$; 3. $a=1$, $b=-2$.

4.11. 1. $D=\mathbb{R} \setminus \{3\}$, б) $D=\mathbb{C} \setminus \{3, 2i, -2i\}$; 2. а) $\frac{1}{x^2-1}$, б) $\frac{1}{x-1}$, в) $\frac{1}{x^2+1}$; 3. а) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$, б) $\frac{x^2-xy+y^2}{(x^2+y^2)(x-y)}$

4.12. 1. $\frac{x^3-2x-1}{(x+2)^3(x-1)^2} = \frac{-5}{9(x+2)^3} + \frac{20}{27(x+2)^2} - \frac{1}{9(x+2)} - \frac{2}{27(x-1)^2} + \frac{1}{9(x-1)}$; 2. $\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}$;

3. $\frac{x^3-2x^2+x+4}{(x^3-x^2+x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)} + \frac{3x}{(x^2+1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}$; 4. $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

4.13. 1. $x_{1/2} = \pm 1$, $x_{3/4} = \pm i$, $x_{5/6} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$, $x_{7/8} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$; 2. $x_{1/2} = \pm i$, $x_{3/4} = \pm 4$; 3. $x_1 = -1$, $x_{2/3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{35}}{8}$,

$x_{4/5} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{6}$; 4. $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_{3/4}=\pm i$, $x_5=3$, $x_6=\frac{1}{3}$.

4.14. 1. а) $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x-3}$, б) $\frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-2}$; 2. а) $\frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{2}{9(x-1)} - \frac{2}{9(x+2)}$, в) $\frac{-3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}$;

3. а) $\frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{2}{2(x^2-2x+3)^2} - \frac{1}{4(x^2-2x+3)}$, б) $\frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4)}$; 6. а) $f(-3)=158$, б) $g(5)=9486$;

7. а) $P(1)=8-i$, б) $P(i)=9-6i$, в) $P(-1)=9+4i$, г) $P(2-i)=-5-84i$; 8. $R(x)=mx+n = \frac{\alpha-\beta}{a-b}x + \frac{b\alpha-\alpha\beta}{a-b}$;

9. $a=b=5$; 10. Делив е, $x^5-6x^3-6x^2-7x-6=(x+1)(x+2)(x-3)(x^2-1)$; 11. Упатство: Решај го системот равенки $f(-1)=-a_0+a_1-a_2+a_3=0$,
 $f(0)=a_3=6$, $f(1)=a_0+a_1+a_3=10$, $f(2)=8a_0+4a_1+a_3=24$, по однос на коефициентите a_0 , a_1 , a_2 , a_3 ; 12. $P(x)=x^4-3x^3-2x^2+4x+5$; 13.

$A(x)=3x^2+3x^2-7x+2$, $B(x)=-3x^3-6x^2+x+2$; 14. а) $x_1=-1$, $x_2=4$, $x_3=5$, б) $x=2$; 15. а) $x_1=\frac{1}{2}$, б) $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$; 16. а) $p=k=0$, б) $p=k=1$,

в) $p=0$, $k=-1$; 17. а) $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$, б) $x_{1/2}=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, в) $x_{1/2}=\pm i$, $x_{3/4}=\pm 2i$, г) $x_1=2$, $x_{2/3}=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}})$

18. $A(x)=9x^2-26x-21$, $B(x)=-9x^3+44x^2-39x-7$; 19. $a^3-4ab+8c=0$;

20. Тие се еднакви: $\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+1}$, $R(-2)=\frac{-2-1}{-2+1}=3$.

ТЕМА 5

- 5.1. 1. $x = \frac{3}{2}$; 2. $x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{7}$; 3. $x = -1$; 7. $x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}$; 11. $x_1 = 4, x_2 = 1$.
- 5.2. 1. $x = 6$, в) $x_1 = 1, x_2 = 3$; 2. а) $x = -2$, б) $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, в) $x = 21$; 3. б) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$, в) $x_1 = \frac{1}{25}, x_2 = 5\sqrt[3]{5}$, г) $x_1 = -3, x_2 = 3$;
4. а) $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{81}$, в) $x_1 = 5, x_2 = \sqrt{5}$, г) $x_1 = -1, x_2 = 4$; 5. в) $x = 10$.
- 5.3. 1. $x_1 = -\frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}$; 4. $x_{1/2} = \pm\pi + 2k\pi, x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 5. $x_1 = 2k\pi, x_{2/3} = \pm 2\pi + 2k\pi, x_{3/4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_{5/6} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 6. а) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, в) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 5.4. 1. а) $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, б) $(-3, -1), (1, 3)$; в) $(2, 3)$; 2. а) $\left(\frac{135}{14}, \frac{5}{14}\right)$; 3. б) $\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
- 5.5. 1. $x > 6$; 2. $x > -9$; 5. $x > -\frac{5-2a}{2+a}$; 7. а) $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (2, +\infty)$, в) $x \in (-2, 3)$; 9. $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; 12. $x \in (-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, +\infty)$.
- 5.6. 1. $x > \frac{5}{2}$; 3. $x > 4$; 4. б) $x > 6$; 5. нема решение; 7. $x \in (-3, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 1)$.
- 5.7. 1. $x \in (-1, 2) \cup (3, +\infty)$; 2. б) $x \in [-1, 2]$; 3. б) $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$; 4. а) $x \in (-4, -3) \cup (-\frac{5}{2}, -2) \cup (-1, 0)$; 5. б) $x \in (-\infty, \frac{7}{2})$.
- 5.8. 1. $x \in (-\infty, +\infty)$; 2. б) $x \in (-\infty, \frac{17}{2}]$; 3. а) $x \in \mathbb{R}$; 4. б) $x \in (-\infty, 1)$; 5. б) $x \in (3, +\infty)$; 6. $x \in (-\infty, 1)$.
- 5.9. 1. а) $x \in (5, +\infty)$; 2. а) $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$; 3. б) $x \in [4, +\infty)$; 5. б) $x \in [\frac{\log 6}{\log 2}, +\infty)$; 6. нема решение.
- 5.10. 1. а) $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$; 2. б) $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$; 3. б) $x \in (\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$; 5. нема решение;
7. б) $x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- 5.11. 1. $x = 16$; 2. б) $x = -2$; 3. б) $x = 5$; 4. а) $x = -\frac{2\log(7) - \log(\frac{228}{7})}{2\log(2) - \log(7)}$; 6. $x = -\frac{2\log[\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})]}{\log(\frac{3}{2})}$; 8. а) $x = 2$; 9. а) $x_1 = 4, x_2 = 8$;
13. а) $x_1 = 2, x_2 = 0$, б) $x = 2$; 14. б) $x > 0$; 15. б) $x_1 \in [\frac{3}{2}, +\infty), x_2 \in (-\infty, 0)$; 16. а) $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}, x_2 = \frac{\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$; в) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 17. б) $x_1 = \frac{5\pi}{24} + 2k\pi, x_2 = \frac{13\pi}{24} + 2k\pi, \mathbb{Z}, x_3 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 18. б) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
19. и) $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; г) $x_1 = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 20. в) $x \in [-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$; 21. б) $x \in [\frac{\pi}{4} + k\pi, \pi + k\pi], k \in \mathbb{Z}, 0 < x < \arctg 3$; 22. а) $x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$; в) нема решение;
23. в) $\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi\right), \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$;
24. а) $x_1 = k\pi, x_{2/3} = \pm 2\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; б) $x_{1/2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 25. $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x_2 = \arcsin 2^{\frac{2}{3}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ТЕМА 6

- 6.1. 1. а) $\operatorname{Re}(z) = 4, \operatorname{Im}(z) = 2$; б) $\operatorname{Re}(z) = -3, \operatorname{Im}(z) = 4$; в) $\operatorname{Re}(z) = 3, \operatorname{Im}(z) = -2$; г) $\operatorname{Re}(z) = -4, \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$;

д) $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{2}$, $\operatorname{Im}(z) = 1 + \sqrt{3}$; е) $\operatorname{Re}(z) = 1 + \sqrt{2}$, $\operatorname{Im}(z) = 1$; в) $\operatorname{Re}(z) = -3$, $\operatorname{Im}(z) = 0$; ж) $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) = -3$.

2. а) $z = 3 + \frac{1}{2}i$; б) $z = -\frac{1}{4} + (2 - \sqrt{2})i$; в) $z = -\frac{1}{3} - \sqrt{3}$; г) $z = m + 1 + (n - \sqrt{2})i$. 3. а) $z = -2 + i$; б) $z = -5i$; в) $z = -4$;

г) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

6.2. 1. а) $r = 2, \varphi = \frac{11\pi}{6}$; б) $r = \sqrt{2}, \varphi = \frac{7\pi}{4}$; в) $r = 2, \varphi = \frac{5\pi}{3}$; г) $r = 4, \varphi = \frac{\pi}{3}$; д) $r = \sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$.

2. а) $z_1 = \frac{1}{\cos \alpha} (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))$; б) $2 \cos \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})$; в) $z_3 = 3(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$. 3. а) $\frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

б) $-4 + 4i\sqrt{3}$. 4. а) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$; б) $3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$; в) $2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$; г) $3(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$;

д) $\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12}$. 5. $\bar{z} = z^{-1} = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$. 6. $\operatorname{Im}(z) = 0$ или $\operatorname{Re}(z) = 0$.

6.3. 1. а) $\sqrt{6}(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}) = \sqrt{6}(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2})$ и $\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2})$;

б) $\sqrt{2}(\cos \frac{13\pi}{4} + i \sin \frac{13\pi}{4}) = -1 - i$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})) = \frac{1}{2}(1 - i)$.

2. а) $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}(-1 + i\sqrt{3})$; б) $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2})$; в) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2})$. 3. а) модулот не се менува, аргументот се зголемува

за $\frac{\pi}{2}$; б) модулот не се менува, аргументот се намалува за $\frac{\pi}{2}$. 4. а) 15i; б) -24; в) $\sqrt{2}i$. 5. а) 1;

б) $\frac{1}{5}(1 + i\sqrt{3})$; в) $\frac{\sqrt{2}}{3}(1 + i)$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$.

6.4. 1. а) $2 + 2i\sqrt{3}$; б) 8i; в) $-16\sqrt{3} + 16i$. 2. а) 1; б) 0. 3. а) $-22i\sqrt{2}$; б) 0; в) 0. 4. Упатство: Претстави ги броевите во тригонометриска форма и потоа искористи ја Моавровата формула.

5. а) $\left\{ \cos \frac{(3+4k)\pi}{8} + i \sin \frac{(3+4k)\pi}{8} \mid k = 0, 1, 2, 3 \right\}$; б) $\left\{ \sqrt[4]{4}(\cos \frac{(1+6k)\pi}{9} + i \sin \frac{(1+8k)\pi}{9}) \mid k = 0, 1, 2 \right\}$;

в) $\left\{ \sqrt[4]{16}(\cos \frac{(-2+6k)\pi}{15} + i \sin \frac{(-2+6k)\pi}{15}) \mid k = 0, 1, 2, 3, 4 \right\}$. 6. а) $\frac{1}{6} - i \frac{\sqrt{3}}{18}$; б) $\{\sqrt{2}(1+i), \sqrt{2}(1-i), \sqrt{2}(-1+i), \sqrt{2}(-1-i)\}$

в) $\left\{ i, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right\}$. 7. $\left\{ -1, 1, i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.

10. $\left\{ \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \mid k = 0, 1, 2, 3, 4 \right\}$.

6.5. 2. Упатство: Докажи дека $|z - iz| = |iz - i^2z| = |i^2z - i^3z| = |i^3z - z|$ и $|z - i^2z| = |iz - i^3z|$.

6.6. 1. $z = z^{10} \cos^{10} \frac{\alpha}{2} (\cos 5\alpha - i \sin 5\alpha)$. 2. $\{a + ib, -a - ib, -b + ia, b - ia\}$, каде што $a = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$.

3. Упатство: Претстави ги броевите во тригонометриска форма и потоа искористи ја Моавровата формула.

4. а) $\{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$; б) $\{2i, -2i, \sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i\}$; в) $\{-3, 3, 3i, -3i\}$. 5. а) $\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cos(n+1)x \cdot \frac{\sin nx}{\sin x}$; б)

$\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos(n+1)x \cdot \frac{\sin nx}{\sin x}$.

6.7. 3. а) 13; б) 2; в) $\sqrt{6}$; г) 1; д) 2; е) $\sqrt{2(1+\cos \varphi)}$. 4. а) 5; б) 10; в) $\sqrt{2-2\cos \varphi}$. 6. а) $(\sqrt{3} + 1)(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$;

б) $2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$; в) $3(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$; г) $3(\cos \pi + i \sin \pi)$; 8. а) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

в) $\frac{3\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; г) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; е) $\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 9. а) 15i; б) -12; в) $i\sqrt{2}$.

10. $r = 2^n \left| \cos^n \frac{\alpha}{2} \right|$, $\varphi = \frac{n\alpha}{2}$. 11. а) r не се менува, а φ ќе се зголеми за $\frac{\pi}{2}$; б) r не се менува, а φ ќе се зголеми за $\frac{3\pi}{2}$; в) r ќе се зголеми 4 пати, а φ не се менува; г) r ќе се зголеми 2 пати, а φ ќе се зголеми за $\frac{3\pi}{2}$; д) r ќе се зголеми $\sqrt{2}$ пати, а φ ќе се зголеми за $\frac{\pi}{4}$; е) r не се менува, а φ ќе се зголеми за $\frac{\pi}{3}$. 12. а) i ; б) $\frac{1}{5}(1+i\sqrt{3})$; в) $\frac{\sqrt{2}}{5}(1+i)$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$. 13. а) i ; б) i ; в) $-i$; г) $\frac{1}{8}(1+i)$. 14. а) 2; б) $-\frac{5}{16}$; в) $\frac{1}{2^{10}}$; г) 2^{10} .

16. а) $x_1 = 4i, x_2 = -4i$; б) $x_1 = 2\sqrt{5}i, x_2 = -2\sqrt{5}i$; 17. а) $x_1 = 2+4i, x_2 = 2-4i$; б) $x_1 = \frac{-3+i\sqrt{23}}{2}, x_2 = \frac{-3-i\sqrt{23}}{2}$; в) $x_1 = \frac{7+i\sqrt{31}}{4}, x_2 = \frac{7-i\sqrt{31}}{4}$; г) $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; д) $x_1 = 1, x_2 = i$; 18. а) $x^2 - 4x + 5 = 0$; б) $x^2 + 5 = 0$.

19. а) $x^2 - 4x + 13 = 0$; б) $x^2 - 24x + 313 = 0$; в) $x^2 - 2(1 + \cos \alpha)x + 2(1 + \cos \alpha) = 0$.

20. а) $\left\{ -3\sqrt{3}i, 3\sqrt{3}i \right\}$; б) $\left\{ z_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \mid k = 0, 1, 2, 3, 4 \right\}$; в) $\left\{ z_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{7} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{7} \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$; г) $\left\{ -\sqrt{\frac{25}{36}}, \sqrt{\frac{25}{36}}, -\sqrt{\frac{25}{36}}i, \sqrt{\frac{25}{36}}i \right\}$; д) $\left\{ -2i, 2i, \sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i \right\}$; е) $\left\{ -\sqrt{2}i, \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right), \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \right\}$; ж) $\left\{ z_k = \cos \frac{(2+6k)\pi}{15} + i \sin \frac{(2+6k)\pi}{15} \mid k = 0, 1, 2, 3, 4 \right\}$; з) $\left\{ z_k = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{(12k-1)\pi}{8} + i \sin \frac{(12k-1)\pi}{8} \right) \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \right\}$; с) $\left\{ z_k = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{(8k+3)\pi}{28} + i \sin \frac{(8k+3)\pi}{28} \right) \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$.

А

апсолутна вредност на реален број, 54
аритметичка средина, 58
алгебарска форма на комплексен број, 153
аргумент на комплексен број, 159

Б

Бернулиево неравенство, 61
биномна равенка, 106

В

водечки коефициент на полином, 67
Виетови формули, 94

Г

геометриска средина, 58
главна вредност на аргумент на комплексен број, 159

Д

дефинициона област, 18
дробен дел од x , 25
деливост на полином, 77

Е

еднакво насочени неравенства, 53
Евклидов алгоритам, 84
експоненцијална равенка, 114
експоненцијална неравенка, 140

З

заеднички делител на полином, 83
заемно прости полиноми, 83

И

иррационална равенка, 17
искази, 53
идентични неравенства, 54
имагинарен дел на комплексен број, 153

Ј

Јенсеново неравенство, 62

К

квадратна средина, 58
Кошиово неравенство, 60
коефициенти на полином, 67
комплексен полином, 68
комплексна рамнина, 154

Л

линеарна контруентна равенка со k променливи, 42
логаритамска равенка, 118
логаритамска неравенка, 143

М

мултипликативна функција, 29
множество решенија на неравенство, 54
метод на регресивна индукција, 63
модул на комплексен број, 155, 159
Моаврова формула, 164

Н

нормален вид на корен, 7
неравенство, 53
нумеричко неравенство, 53
неравенство на Коши, Шварц, Буњаковски, 61
нормален вид на полином, 67
нула полином, 67
нула на полином, 68
неразложлив полином, 79
неправа рационална дробка, 99

О

Ојлерова функција, 37
Основна теорема на алгебрата, 91

П

пријателски природни броеви, 30
примитивен корен по модул, 40
предикати, 53
полином, 67
повеќекратна нула, 82
проширување на рационална дробка, 98
претставување на дробка во канонична форма, 98

права рационална дробка, 99
проста дробка од прв вид, 100
проста дробка од втор вид, 100
полиномна равенка, 105
поларен координатен систем, 157
примитивни корени на бројот 1, 168

Р

рационализација на именител или
броител, 12
редуциран систем на остатоци, 36
ред на бројот, 40
решение на неравенство, 54
реален полином, 68
рационален полином, 79
разложлив полином, 79
реален дел на комплексен број, 153

С

совршен природен број, 30
спротивно насочени неравенства, 53
слободен член на полиномот, 67
скратување на рационална дробка, 98
симетрична равенка, 109

Т

Теорема на Безу, 76
триномна равенка, 109
тригонометриска равенка, 122
тригонометриска неравенка, 146
тригонометриска форма на комплексен
број, 159

Ф

функционално неравенство, 53

Х

хармониска средина, 58

Ц

цел дел од x , 25
целоброен полином, 68
цели рационални изрази, 97

СОДРЖИНА

1. КОРЕНУВАЊЕ

1.1. Проширување и скратување на корени. Коренување на производ и количник.....	5
1.2. Нормален вид на корен.....	7
1.3. Операции со корени.....	10
1.4. Рационализирање на именител на дробка.....	12
1.5. Идентитети.....	14
1.6. Упростување на ирационални изрази.....	15
1.7. Ирационални равенки и нивно решавање со воведување на нова непозната.....	17
1.8. Ирационални равенки. Решавање на ирационални равенки со последователно степенување на корените.....	20
1.9. Задачи за вежбање.....	22

2. ОДБРАНИ ДЕЛОВИ ОД ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

2.1. Функциите $[x]$ и $\{x\}$	25
2.2. Мултипликативни функции.....	28
2.3. Конгруенции во множеството на цели броеви.....	30
2.4. Системи на остатоци.....	35
2.5. Ојлерова функција и нејзините својства.....	37
2.6. Теорема на Ојлер, Ферма и Вилсон.....	39
2.7. Системи линеарни конгруентни равенки.....	42
2.8. Некои Диофантови равенки. Питагорини тројки.....	45
2.9. Метод на спуштање кај некои Диофантови равенки.....	48
2.10. Задачи за вежбање.....	51

3. НЕРАВЕНСТВА

3.1. Поим и видови неравенства.....	53
3.2. Апсолутна вредност и својства на апсолутна вредност на реален број.....	54
3.3. Неравенства со апсолутни вредности.....	57
3.4. Средни величини.....	58
3.5. Некои поважни неравенства.....	64
3.6. Задачи за вежбање.....	65

4. ПОЛИНОМИ

4.1. Основни поими за полиноми.....	67
4.2. Собирање и множење на полиноми.....	70
4.3. Делење на полиноми.....	73
4.4. Деливост на полиноми.....	77
4.5. Нули на полиномите.....	80
4.6. Најголем заеднички делител на два полиноми.....	83
4.7. Полиноми со цели и рационални коефициенти.....	86
4.8. Метод на неопределени коефициенти. Основна теорема на алгебрата.....	90
4.9. Врска меѓу нулите на полиномот и коефициентите пред променливите.....	93

4.10. Полиноми со реални коефициенти.....	95
4.11. Дробно рационални изрази со една променлива.....	97
4.12. Трансформација на рационалните дробки во вид на збир од прости множители	99
4.13. Полиномни равенки.....	105
4.14. Задачи за вежбање.....	113

5. РАВЕНКИ, СИСТЕМИ РАВЕНКИ, НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ НЕРАВЕНКИ

5.1. Експоненцијални равенки.....	115
5.2. Логаритамски равенки	116
5.3. Тригонометриски равенки.....	122
5.4. Систем од две експоненцијални, две логаритамски или две тригонометриски равенки со две непознати.....	126
5.5. Линеарни и квадратни неравенки.....	129
5.6. Систем линеарни квадратни неравенки.....	133
5.7. Дробно рационални неравенки со една непозната.....	138
5.8. Експоненцијални неравенки и систем експоненцијални неравенки.....	141
5.9. Логаритамски неравенки и систем логаритамски неравенки.....	143
5.10. Тригонометриски неравенки.....	146
5.11. Задачи за вежбање.....	150

6. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

6.1. Форми на задавање на комплексните броеви.....	153
6.2. Тригонометриска форма на комплексните броеви.....	158
6.3. Множење и делење на комплексни броеви во тригонометриска форма.....	164
6.4. Степенување и коренување на комплексни броеви. Моаврова формула.....	165
6.5. Неравенства на модул од збир и модул од разлика на два комплексни броја	170
6.6. Примена на комплексните броеви во тригонометриска форма.....	171
6.7. Задачи за вежбање.....	174
Одговори и решенија на задачите	177

Акционерско друштво за издавање учебници и наставни средства
ПРОСВЕТНО ДЕЛО - Скопје, ул. „Димитрија Чуповски“ број 15

*

За издавачот
м-р Павле Петров, генерален директор

*

ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ КОСТАДИН ТРЕНЧЕВСКИ
БИЛЈАНА КРСТЕСКА СНЕЖАНА ЗДРАВЕСКА

*

АЛГЕБРА
за трета година на реформираното
гимназиско образование

*

Лектор
Сузана СТОЈКОСКА

*

Технички уредник
Новко ГРУЕВСКИ

*

Коректура:
Авторите

Тираж: 349

Печати: Европа 92 - Кочани

СР - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“
Скопје

512 (075.3)

АЛГЕБРА : за трета година на реформираното гимназиско образование
/Глигор Тренчевски, Костадин Тренчевски, Билјана Крстеска, Снежана
Здравеска. - Скопје : Просветно дело, 2005. - 184 стр. : илустр. : 24 см

ISBN 9989-0-0387-4

1. Тренчески, Глигор